R

Ad Bibliothecam
Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli
in Weyarn
comparavit
P. VALENTINUS HANSCH Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.

Math. P. 286 m

Mathesis. Geometria specialis
290.

R

Versuch einer Analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten.

Nebst einer Vorrede von

Abraham Gotthelf Kästner
Der Math. und Naturl. Prof. der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen; der Kön. Schwed. und Preuss. Akad. der Wiss. der Erfurtischen Churf. Ges. nützl. Wiss des Bononischen Instituts; der Perusinischen Academiae Augustae, der Jenaischen latein. und teutschen und der Leipziger deutschen Ges. Mitgliede.

Göttingen
bei Victorinus Boßigel 1759.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochgebohrnen Excellenz

Herrn

Gerlach Adolf

Freyherrn

von Münchhausen

Erbherrn auf Straußfurth ꝛc.

Sr. Königl. Maiestät von Großbrittanien und Churfürstl. Durchl. zu Braunschweig Lüneburg

würklichem geheimen Rathe, Staatsminister, Cammerpräsidenten

und

Curatorn

der Georgaugustusuniversität

Seinem Hochgebiethenden und gnädigen Herrn

eignet diesen Versuch in Unterthänigkeit zu

der Verfasser

M. Hube.

Vorrede.

Es scheint mir beinahe überflüßig zu sein, zu zeigen, wie nothwendig die Lehre von den Kegelschnitten in der ganzen Naturlehre und in der angewendeten Meskunst sei. Man darf blos die principia des unsterblichen Newtons kennen, wenn man sich davon überzeugen will. Und was hätte sonst wol die grösten Meskünstler einen Newton, de la Hire, de l'Hôpital Simson, Euler,

Hausen u. a. m. bewegen können, diese Materie in ein grössres Licht zu setzen? - Ist es aber eben deswegen, könnte man einwenden, nicht verwegen, wenigstens überflüßig, nach so vielen Bemühungen, noch etwas von den Kegelschnitten zu schreiben? - Ich glaube nicht. Denn unter allen diesen berühmten Schriftstellern ist mir, ausser Herrn Eulern, keiner bekant, der sich der analytischen Methode bedient hätte, da dieselbe doch, nicht nur wegen ihrer Kürze und Deutlichkeit, sondern anch wegen ihrer Allgemeinheit, der synthetischen unstreitig vorzuziehen ist. Dieser grosse Meskünstler aber hat die Lehre von den Kegelschnitten in einem weit-

läuftigen und kostbaren Werke * unter vielen andern Materien mit abgehandelt, und sich oft der Begriffe von unendlichen Grössen bedient, denen die Evidenz nicht eben eigen zu sein scheint. Man hatte also dem ohngeachtet noch keinen kurzen, analytischen, und ohne Beihülfe unendlicher Grössen vollständigen Abriß blos von den Haupteigenschaften der Kegelschnitte. Ich habe es gewagt einen Versuch davon bekant zu machen. Wie glüklich wäre ich, wenn ich nach dem Urtheile der Kenner, meinen Zweck erreicht hätte!

Ich

* Introductio in Analysin infinitorum.

Ich bitte daher diejenigen, die sich etwa die Mühe geben solten diesen Aufsatz zu lesen, hier keine synthetische oder mechanische Auflösungen zu suchen; wie z. E. mehrentheils diejenigen sind, welche die Beschreibung der Kegelschnitte betreffen. Eben so wenig habe ich es meinem Zwecke gemäß erachtet Sätze anzuführen, welche die Natur der Kegelschnitte sehr wenig erläutern, dergleichen z. E. die geometrischen Auflösungen der Gleichungen vom dritten und höhern Graden sind, deren Nutzen ich ausser dem, die Wahrheit zu sagen, sehr wenig einsehe.

Ich könnte noch erwähnen daß die Methode, den Halbmesser der Krümmung

mung zu bestimmen, der ich mich bedient habe, ganz neu sei, weil ich durch eignes Nachsinnen darauf gekommen bin. Allein ich habe nachgehends gefunden daß Bernoulli sie schon bekant gemacht habe, und Newton sagt: On sait, que les seconds Inventeurs n'ont pas de droit à l'invention. Rec. de div. piec. T. II. 94.

Uebrigens halte ich es für nöthig hier noch zu sagen, daß Newtoni Principia die Treatise of Fluxions by Colin Mac-Laurin, die Analyse des lignes courbes par Mr. Cramer. Euleri Introd. in Anal. Infin. Hausenii Elementa, Gregor. a S. Vincent. Opus Geometricum die vornehmsten Schriften ge-

wesen sind, deren ich mich bei Verfertigung dieses Aufsatzes vornämlich bedient habe.

Göttingen 1757.

Verzeichniß der abgehandelten Sachen

Einleitung.

§. 1. Was veränderliche Grössen sind?
§. 2. Was die Dimensionen und Grade der Gleichungen sind.
§. 3. Wie die Gleichungen durch Linien vorgestellt werden.
§. 4. Was es bedeute wenn eine Applikate oder Abscisse = o ist.
§. 5. Beispiel einer algebraischen Linie vom ersten Grade.
§. 6. Eine Linie verändert ihren Grad niemahls.
§. 7. Von den Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Grösse.

Das erste Buch.

§. 1. und 2. Allgemeine Gleichung vom zweiten Grade in der zwo veränderliche Grössen sind.
§. 3. In welchem Falle eine Linie vom zweiten Grade aus geraden zusammengesezt ist.
§. 4. Eine Linie vom zweiten Grade kan von einer geraden nur in zweenen Punkten durchschnitten werden.
§. 5. Durchmesser.
§. 6. Wenn die Axe der Abscissen ein Durchmesser ist.
§. 7. Wie man einen Durchmesser zieht.

§. 8.

§. 8. und 9. Zusätze zum vorhergehenden.
§. 10. und 11. Von den Producten aus beiden Applikaten.

Das zweite Buch.

§. 1. Allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte.
§. 2. 3. Durch 5 Punkte wird ein Kegelschnitt bestimmt.
§. 4. Die Kegelschnitte haben eingebildete Applikaten auch bei würklichen Abscissen, und
§. 5. Berührungslinien.
§. 6. Haupteigenschaft dieser Linien.
§. 7. und 8. Einige Folgerungen hieraus.
§. 9. An einen gegebnen Punkt des Kegelschn. eine Ber. Lin. zu ziehen.
§. 10. Die Subtangente durch eine Gleichung zu finden.
§. 11. biß §. 14. Folgerungen aus dem Prodnckt der Werthe von y in dieser Gleich.
§. 15. und 16. Folgerungen aus deren Summe.
§. 17. Die Subnormal zu finden.
§. 18. Abgemeine Gleichung, wenn die Axe der Abscissen ein Durchmesser des Kegelschn. ist.
§. 19. Folgerung aus ihr
§. 20. Der Parameter
§. 21. biß §. 24. Von den Brennpunkten.
§. 25. biß §. 35. Von dem Krümmungkreise.

Das dritte Buch.

§. 1. Jeder Kegelschnitt kan durch die Gleichung $y^2 - m^2 x^2 - nx = 0$ ausgedrückt werden.

§. 2.

§. 2. Es kan n positiv oder negativ sein.
§. 4. Die Parabel.
§. 5. Die Ellipse.
§. 6. Die Hyperbel.
§. 7. biß §. 10. Wie diese Linien durch den Schnitt einer Kegeloberfläche entstehn.
§. 11. biß §. 13. Betrachtungen über die allgemeine Gleichungen dieser Linien.
§. 14. Der Kreis, und die rechtwinklichte Hyperbel.

Das vierte Buch.

§. 1. Jeder Durchmesser der Parabel hat eine Spitze.
§. 2. Haupteigenschaft der Parabel.
§. 3. und §. 4. Alle Durchmesser der Parabel sind unter einander gleichlauffend; und umgekehrt.
§. 5. Die Subtangente und Subnormal der Parabel.
§. 6. Vom Parameter der Durchmesser der Parabel.
§. 7. biß §. 11. Von dem Brennpunkte der Parabel.
§. 12. Vom Krümmungskreise an der Hauptspitze in der Parabel.

Das fünfte Buch.

§. 1. Besondre Gleichung für die Ellipse und Hyperbeln.

§. 2.

§. 2. Der Mittelpunkt.
§. 3. Aus dem gegebnen Mittelpunkte, und einer Ordinate, dieser ihren Durchmesser zu finden.
§. 4. Jeder Durchmesser der Ellipse und Hyp. geht durch den Mittelp.
§. 5. bis §. 7. Zugeordnete Durchmesser.
§. 8. Von der Summe oder dem Unterschiede der Quadrate zugeordneter Durchmesser.
§. 9. und §. 10. Von den Parallelogr. bei zugeordneten Durchmessern.
§. 11. Satz von dreien Berührungslinien.
§. 12. und §. 13. Vom Parameter.
§. 14. bis §. 20. Von den Brennpunkten der Ellipse und Hyperbeln.
§. 21. und §. 22. Von dem Krümmungskreise bei ebendenselben.

Das sechste Buch.

§. 1. Was die Asymptoten der Hyperbel sind.
§. 2. Wie man sie findet,
§. 3. Jede durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehende gerade Linie, ist entweder ein Durchmer oder eine Asymptote.
§. 4. Folgerungen hieraus.
§. 5. Von den Verhältnissen bei den Asymptoten.
§. 6. Potrnz der Hyperbel.
§. 7. bis 10. Einige andre Haupteigenschaften der Asymptoten.
§. 11. Allgemeine Gleichung der Hyperbel wenn die eine Axe der Asymtote gleichlauffend ist.
§. 12. Von zugeordneten Hyperbeln.

Ein=

Betrachtungen
über die
Beschaffenheit und den Gebrauch
des analytischen Vortrages.

von

A. G. Kästner.

Die Kegelschnitte sind die ersten krummen Linien gewesen, welche die Alten nächst dem Kreise betrachtet haben. Zuerst hat wohl nur das Sonderbare die Aufmerksamkeit der Mathematikverständigen gereizet, daß aus der

Zerschneidung des Kegels verschiedene krumme Linien, und eine bestimmte Anzahl derselben entstehen. Sie setzten den Unterschied derselben anfangs in der Beschaffenheit des Kegels, und schnitten eine aus dem spitzwinklichten, eine andere aus dem stumpfwinklichten, die dritte aus dem rechtwinklichten. Apollonius bemerkte, daß sich alle drey aus einem Kegel schneiden liessen, nachdem man die Lage der schneidenden Ebene verändert, und belegte sie mit dem Nahmen der Ellipse, Hyperbel, und Parabel, die sich auf ihre Eigenschaften gründen, und wenn man sie gehörig versteht, Erklärungen sind. Der Nutzen dieser Kenntnisse zeigte sich bald, nachdem man einige Schritte in ihnen gethan hatte. Man fand, daß sie gewisse Aufgaben aufzulösen dienten, welche die Kräfte der gemeinen Geometrie überstiegen, darunter die Verdoppelung des Würfels, und die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile, bey den Alten berühmt waren. Man nannte diese Aufgaben körperliche, weil man sich bey dem Ursprunge dieser krummen Linien, allemahl die Zerschneidung

dung

dung eines Körpers vorstellte. Wenn man indessen die Eigenschaften die durch ihre Nahmen ausgedrückt werden, als Erklärungen annimmt, so läßt sich alles was ihnen zukömmt daraus herleiten, ohne daß man aus der Ebene in der sie sich selbst befinden gehen darf, die Frage ausgenommen, auf was für eine Art sich jede aus dem Kegel schneiden liesse. Man könnte also fast der Betrachtung des Kegels bey ihnen entbehren, wenn sie nicht nöthig wäre, ihren gemeinschaftlichen Nahmen zu rechtfertigen, und wenn nicht diese Betrachtung in manchen Fällen, z. E. in der Perspectiv, nützlich seyn könnte.

Die Alten haben vornehmlich in diesen Untersuchungen schöne Muster der **geometrischen** Analysis gegeben, bey der man voraussetzt, das Gesuchte sey schon bekannt, und aus Betrachtung der Figur schließt, wie es mit den gegebenen Dingen zusammenhänge, und also rückwärts durch dieselben bestimmt wer-

de.

de. Pappus (*) hat diesen Begriff deutlich erkläret, und gewiesen, daß dergleichen Verfahren nicht nur zu Auflösung der Aufgaben, sondern auch zum Erweise der Lehrsätze dienen könne, wenn man nähmlich bey der Prüfung eines Satzes auf solche Folgerungen kömmt, aus denen er rückwärts fließt Auf dieses Verfahren, mit der Buchstabenrechnung und dem Gebrauche der Gleichungen verbunden, kömmt die heutige Analysis an, die in nachfolgender Schrift glücklich zu der Untersuchung der Kegelschnitte ist gebraucht worden. Der Herr Verfasser hat in seinem Vorberichte schon zulänglich dargethan, daß seine Arbeit nicht überflüßig ist. Cartes hat zwar in seiner Geometrie die Eigenschaften der krummen Linien durch die Analysis untersucht, und solches besonders bey den Kegelschnitten verrichtet; Sein Werk enthält eigentlich die damahligen Anfangsgründe der höhern Geometrie. Es verewiget das Andenken des Cartesius seines Verfassers, und grossentheils seines

(*) Coll. Matth. im Anfange der Vorrede des siebenten Buchs.

nes Erfinders, aber es hat nach hundert Jahren das Schicksaal aller Anfangsgründe, es wird jetzo für Anfänger unvollständig, da es bey seiner ersten Erscheinung, den meisten Lehrern zu schwere Neuigkeiten enthielte. Calandrins Abhandlung von den Kegelschnitten, die des le Seur und Jacquier Commentario über Newtons principia eingerückt ist (*), Colin Mac Laurins Schrift de linearum geometricarum proprietatibus generalibus, welche sich bey seiner Algebra befindet u. a. lassen sich den von dem Herrn Verf. angeführten Schriften beyfügen; und sind eben so wenig als jene für Anfänger. Gleichwohl ist die Kenntniß der Kegelschnitte so unentbehrlich, daß man sie nach dem jetzigen Zustande der Wissenschaft fast zu den Anfangsgründen setzen muß. Eine Schrift wie die gegenwärtige, würde also in jeder Sprache ihren Werth haben, und sie hat in der Deutschen noch einen höhern, wo noch nichts dergleichen erschienen ist. Das Lob welches ich ihr beylegen könnte

(*) L. I. not. 224.

te würde verdächtig seyn, wenn ich auch gleich versicherte, daß der Herr Verfasser bey seinem hiesigen Aufenthalte sich meines Unterrichtes nur in den Anfangsgründen der angewandten Mathematik bedienet, und bey den nachfolgenden und ähnlichen Untersuchungen, zu denen er Eifer und Geschicklichkeit mit hieher brachte, nur selten meinen Rath und einige meiner Bücher gebraucht hat. Ich erwähne es also nicht ihm zum Ruhme, sondern andern zur Aufmunterung, daß es nicht an ihm lag, wenn diese Frucht seines Fleisses nicht schon vor einem Jahre, ehe er noch die hiesige hohe Schule verließ erschienen ist, wie ich sie in einer damahls herausgegebenen Schrift auf diese Art angeführt habe. (*)

Da der Herr Verfasser sich besonders durch den analytischen Vortrag von andern unterscheidet, die eben den Gegenstand abgehandelt haben, so werden einige Betrachtungen über die Natur und den Gebrauch dieses Vortrages hier nicht auser ihrer Stelle seyn.

Der

(*) Demonstratio theorematis binomialis. Gott. 1758. p. 13.

Der synthetische Vortrag, welcher uns von den Wahrheiten überzeugt, ohne daß er lehrte wie sie gefunden werden, ist von den Alten bey den Anfangsgründen beliebt worden. Sie foderten von dem Lehrlinge erstlich eine Menge Sätze von andern zu lernen, ehe er es wagen durfte selbst zu erfinden. Die Wissenschaften waren damahls noch nicht so weitläuftig, daß man so sehr als jezt Ursache gehabt hätte ihre Erlernung leicht, kurz und angenehm zu machen. Wer aber die Anfangsgründe wohl gefaßt hatte, dem wurde nach des Pappus Berichte (*) durch die Untersuchungen von den geometrischen Oertern Anlaß gegeben, eigene Entdeckungen zu machen.

In der That scheint dieses Verfahren den ordentlichen Kräften der Menschen am besten gemäß. Aus vielen Dingen die man schon weiß, kann man durch ihre mannichfaltige Verbindung und Vergleichung, auch mit einer mittelmäßi-

(*) a. a. O.

mäßigen Geschicklichkeit was Neues herausbringen. In den Künsten verfährt man so wohl auf diese Art als in den Wissenschaften: aber die ersten Entdeckungen von einer Sache zu machen von der man gar nichts oder ungemein wenig weiß, eine Kenntniß aus nichts hervorzubringen, ist ohne Zweifel eine Schöpfung in den Wissenschaften. Derjenige, der zuerst bemerkte, daß der Durchmesser den Kreis halbirt, oder daß zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel ein Dreyeck bestimmen, ein Pascal, wenn es wahr ist, daß er sich ohne Bücher und Lehrer selbst eine Geometrie mit eigenen Kunstwörtern machte, verdient zum wenigsten eben so gut den Nahmen eines schöpferischen Geistes, als ein Dichter der Götter und Teufel erfindet. Bey jener Art von Schöpfung muß die Seele wachen, die letztere verrichtet sie zuweilen auch im Traume.

Für denjenigen also welcher keine solche Schöpferkraft besitzt, ist unumgänglich nöthig, daß er sich verschiedene Sätze bekannt macht, ehe er neue entdecken

will

will. Indessen kann er selbst bey dieser Beschäfftigung zum Erfinden angeführt werden. Ohne die Ordnung der Sätze im Euklides zu ändern läßt sich meistens leicht zeigen, wie man auf viele der folgenden kommen kann, wenn man einige der vorhergehenden weiß. Diese Verbindung des analytischen Vortrages mit dem synthetischen scheint mir die Pflicht eines Lehrers zu seyn; und ich zweifele nicht, daß es die Alten nicht auch so gemacht haben. Sie trieben die Mathematik, ohne Absicht auf den Nutzen ihrer Ausübungen, nur den Verstand zu schärfen; und vermuthlich lernten von der vornehmen griechischen Jugend eben soviel die theoretische Geometrie um sich im Nachdenken zu üben, soviel junge Cavalliere jetzo ohne einiges Nachdenken Handgriffe mit Zirkel und Liniale auswendig lernen, die sie practische Mathematik nennen.

Da es in der Mathematik allein auf die Vergleichung der Grössen ankömmt, so sind geschickte Zeichen der Grössen und ihrer Vergleichungen unentbehrlich. Daher

her ist die Buchstabenrechnung in allgemeinen Gebrauch gekommen, ohne die man jetzo kaum die gemeinsten Anfangsgründe vortragen kann. Sie enthält Zeichen der Grössen und ihrer Veränderungen, man begreift also leicht, daß sie nicht eher zu gebrauchen ist, bis man sich von den Grössen die gehörigen Begriffe gemacht hat, die durch diese Zeichen sollen ausgedrückt werden. Newton (*) hat sehr deutlich gewiesen, wie man eine Aufgabe aus den Worten mit denen sie ausgedrückt wird in die Buchstaben übersetzt; und wer dieses erwäget, der wird leicht einsehen, daß man die Aufgabe, zuvor wie sie mit Worten ausgedruckt wird verstehen müsse, ehe man sie in die Buchstaben übersetzen will. Dagegen fehlen viele so genannte Algebraisten, die ein a; b; x; hinschreiben werden, ehe sie die Grössen welche sie durch diese Buchstaben ausdrücken, recht kennen, alsdenn die Zeichen nach den gelernten Regeln versetzen und verbinden, und also auf eine mechanische Art Wahrheiten herausbringen, wie jemand der

(*) Ar. vniu. p. 64. ed. Graves.

der an einen Raritätenkasten drehte Puppen zum Vorschein bringen könnte, ohne den Bau des Kastens und die Ursache zu wissen warum jetzo diese, jetzo andere Puppen kommen. Wie in diesem Falle das Hervorbringen der Puppen eigentlich dem zugehört, der den Kasten gemacht hat, und sich jetzo nur dazu einer Hand bedienet die leyert, so gehören die Erfindungen jenes mathematischen abc Schützens, eigentlich demjenigen zu, der die Regeln der Buchstabenrechnung verfaßt hat, und die Mühe Buchstaben darnach auf allerley Art zu versetzen arbeitsamen Leuten überließ.

Eine Uebung in der geometrischen Analysis nach Art der Alten, so wie unter den Neuern, Hausen in seinen Kegelschnitten dazu gute Anleitung gegeben hat, dienet uns vor dergleichen Fehlern zu verwahren. Sie lehret uns auf die Figur aufmerksam seyn, das heißt die Sachen selbst und ihr Verhalten gegeneinander zu betrachten, nachgehends ist es erlaubt, Dinge die wir zulänglich kennen mit Zeichen anzudeuten, wo oft selbst

selbst die Wahl der Zeichen geschickter ausfallen wird, als wenn wir solche ohne Ueberlegung angenommen hätten. Ein bekanntes Exempel hievon ist die Erinnerung, nicht allemahl die Grösse nach der gefragt wird unmittelbar zu suchen, sondern oft nach einer andern zu forschen, von der jene bestimmt wird, und die selbst leichter zu finden ist. Newton hat hievon eine brauchbare Regel gegeben, (*) und hieher gehörige Beyspiele kommen unter den ersten algebraischen Aufgaben vor (*). Rechnen, heißt: Zeichen der Grössen nach festgesetzten Vorschriften verbinden. Bey dieser Arbeit denkt man nicht mehr an die Grössen selbst, denen die Zeichen zugehören. In den gemeinsten Rechnungen, in der Regel Detri, z. E. wo man den Preis einer gegebenen Menge von Waare sucht, bekümmert man sich, sobald der Satz gehörig gemacht ist, nicht mehr darum, ob diese Zahl Thaler, jene Pfunde bedeute: Nur den Satz zu machen, müßte man diese Bedeutungen wissen.

(*) Ar. vn. Probl. Geom. 24.

(*) Wolf El. Analys. §. 148.

wissen. Dieses ist indessen kein Vorwurf für eine Rechnungsart, daß sie Verbindungen von Zeichen lehret, bey denen wir die bezeichneten Sachen vergessen dürfen. Vielmehr ist es ein Vortheil, den wir nach den engen Schranken unserer Kräfte bey weitläuftigen Untersuchungen nicht wohl entbehren können. Man urtheile selbst hieraus, ob das Verfahren einiger besonders brittannischer Mathematikverständigen vollkommen Beyfall verdiene, denen nur Auflösungen die durch die reine geometrische Analysis ohne die Buchstabenrechnung vollführet werden; oder lieber gar solche, wo der Weg zur Erfindung durch die Synthesis verstellt ist, schön vorkommen. Für die synthetische Verkleidung der Auflösungen kann ich mich gar nicht erklären. Mich deucht, jeder der zu etwas mehr bestimmt ist, als ein Anfänger zu bleiben, wünscht, seine Schülerzeit so bald als möglich zu endigen. Er sucht mit einer edlen Ungeduld sich selbst zu unterrichten, und wie kann er es ausstehen, wenn er stets auf die Lippen des Lehrers sehen soll. Ich wenig-

nigstens bin von dem Herrn von Tschirnhausen verführet worden, zu glauben (*) das größte Vergnügen das wir geniessen können, sey: die Wahrheit durch uns selbst zu erfinden. Daher habe ich mich selten überwinden können, synthetische Beweise von Sätzen die nicht zu den Anfangsgründen gehörten durchzubuchstabiren: Ich beschäfftigte mich mit der Untersuchung wie man auf diese Sätze gekommen sey; und wenn mich dieses mehr Zeit kostete so gab es mir auch vielmehr Befriedigung.

Der reinen geometrischen Analysis würde ich weniger entgegen seyn. Man würde sich meines Erachtens dem Vergnügen das sie gibt überlassen können, wenn man nur wenige und leichte Untersuchungen anzustellen hätte. Doch sie allein, bey der Menge von Dingen die wir zu lernen haben, anwenden wollen, das hiesse die Kürze des menschlichen Lebens nicht recht bedenken. Sie kann für einen Geist der zu denken ge-

(*) Medic. Ment. L. I.

gewohnt ist eigne Reizungen haben, weil sie ihn stets mit den Begriffen selbst beschäfftiget, und nie gedankenlos Zeichen auf eine mechanische Art versetzen läßt: Aber sie führet ihn nicht so leicht zu der allgemeinen und weitläufigen Kenntniß zu der ihn die Buchstabenrechnung mit ihr vereiniget bringen kann. Gesetzt sie verliert dadurch etwas von ihrer Schönheit, ohne daß der wesentliche Vorzug der mathematischen Kenntniß, die Gewißheit, etwas leidet? wird es wohl ein Fehler seyn, wenn der Mathematikverständige, wie Männer die ökonomisch denken, bey gleichen Tugenden, weniger Schönheit, mit mehrern Reichthume wählet?

Ich kann mich auch nicht bereden, daß in den Künsten wo es auf Zeichnungen ankömmt, wie z. E. beym Steinhauen, nach Freziers Gedanken (*) die algebraische Rechnung unbequemer seyn sollte. Es ist deucht mich zweyerley, eine Aufgabe aus Betrachtung der Figur aufzulösen, und diese Auf-

(*) Coupe des pierres, 2 disc. prelim. p. 9.

Auflösung durch eine geschickte Verzeichnung bewerkstelligen. Das letzte läßt sich, wie viele Proben zeigen, aus der algebraischen Rechnung herleiten, ohne daß man sich in die Weitläuftigkeit des ersten Verfahrens eingelassen hat.,

Unter den Kunstgriffen der Buchstabenrechnung die unsere Untersuchungen so verkürzen, ist insbesondere der Gebrauch der entgegengesetzten Grössen merkwürdig. Er setzt uns in den Stand, eine Menge von Fällen unter einem einzigen Ausdrucke zu begreiffen; und selbst die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Aufgaben zu beurtheilen. Die Lehre von diesen Grössen ist ein deutliches Beyspiel, wie nöthig es sey sich Begriffe zu machen, ehe man Zeichen gebrauchen will. Daß die verneinten Grössen weniger als nichts sind; ist ein Ausdruck, den man in einer gewissen Bedeutung des Wortes Nichts gelten lassen kann. Ist es nicht eine Demüthigung für den menschlichen Verstand daß Philosophen wie Cartes und Wolf, sich

sich durch diesen Ausdruck, durch ein Wortspiel, haben verführen lassen, die verneinten Grössen für falsche (*) zu erklären, sie aus der Zahl wahrer Grössen zu stossen (**), und wenn sie als Wurzeln von Gleichungen vorkommen, nicht in Betrachtung zu ziehen (***). Nach diesen Beyspielen darf man sich eben nicht wundern, wenn andere Geometern auf Schlüsse kommen, die ihnen selbst unglaublich scheinen, und die sie doch einer Rechnung zu gefallen glauben, welche die Zeichen verneinter Grössen da angebracht hat, wo sich ihr Begriff nicht anbringen liesse. Man wird hier auf wunderbare Sätze verfallen, wenn man Zeichen und Sachen nicht unterscheidet, und jene weiter statt dieser setzt, als es erlaubt ist. Weil verneinter Grössen Logarithmen unmöglich

sind,

(*) Cartes. Geom. L. III. sub init.

(**) Wolf El. Analys. §. 19.

(***) Wolf El. Anal. §. 143.

sind, und weil der Cosinus eines Winkels zwischen 90 und 180 Gr. verneint ist, wird deßwegen sein Logarithme unmöglich seyn? Niemand kann so schliessen, denn die Bedeutung in welcher man diesen Cosinus verneint nennt; hat mit seinen Logarithmen nichts zu thun.

Bey Grössen die man als Zahlen ansehen darf, das ist bey allen, lassen sich aus den Proportionen wodurch eine die andere bestimmt, vermöge der bekannten arithmetischen Lehrsätze von den äusersten und mittelsten Gliedern einer Proportion, alsobald Gleichungen machen; und es ist also offenbahr einerley, ob man die Lehren mit den Alten durch Verhältnisse und Proportionen, oder, wie es die Neuern zur Rechnung bequemer gefunden haben, durch Gleichungen ausdrücken will.

Die Mannichfaltigkeit der Wurzeln in den Gleichungen, zeigt ebenfalls die Nothwendigkeit, sich um die Be-

Bedeutung der Zeichen genau zu bekümmern, durch welche man die Grössen ausdrückt. Kepler erklärte deßwegen die Algebra, oder die Coß, wie sie zu seinen Zeiten noch hiesse, für unzuverläßig, weil sie das was man sucht mit andern Dingen vermengt gäbe die man nicht suchte, und weil man also das Gesuchte gleichsam unter diesen vielen Dingen errathen müßte (*). Er rechtfertiget aber die Algebra selbst wieder, indem er zeigt was die andern Dinge sind, die zugleich mit dem was man eigentlich sucht gefunden werden, daß man nähmlich in dem Exempel welches ihn zu dieser Betrachtung veranlaßt, nebst der Seite eines ordentlichen Siebenecks zugleich seine Diagonalen findet. Die Aussprüche der Algebra lassen sich mit vieldeutigen Orakeln vergleichen. Nur liegt die Schuld dieser Vieldeutigkeit nicht an der Göttin die sie ertheilt, sondern

(*) Harmonice Mundi. L. I. Pr. 45. p. 35.

dern an dem der fragt. Ohne es selbst zu wissen, fragt er vielerley zugleich; würde die Antwort vollkommen seyn die nicht alle seine Fragen zugleich enthielte? und liegt es nicht ihm ob, diese Fragen aus einander zu setzen, und zu untersuchen auf welche sich jeder Theil der Antwort schicket? Man ist auch allemahl im Stande dieses zu bewerkstelligen, wenn man nur wie gehörig, ehe man rechnet, und nachdem man gerechnet hat, an die Sachen selbst denken will, die man nur währender Rechnung vergessen darf. So läßt sich bey der Aufgabe von der Theilung eines Winkels überhaupt, und insbesondere bey der Beschreibung der ordentlichen Vielecke in den Kreis, zeigen woher die vielen Wurzeln kommen, die ganz andere Dinge bedeuten, als was der Suchende eigentlich wissen will (*). Man findet auf diese Art,

daß

(*) v. Progr. meum: Vnde plures insint radices, aequationibus sectiones angulorum definientibus Gott. 1756.

daß man öfters an mehr Dinge denkt, als man selbst weiß; daß man mit nach den Diagonalen eines Vielecks fragt, wenn man glaubt nur seine Seiten zu suchen, und daß Sachen die ganz verschieden scheinen, so mit einander verbunden sind, daß man eine nicht ohne die andere finden kann.

Mich deucht, aus diesen Betrachtungen wird sich ein Vorwurf beantworten lassen, der mit einigem Scheine der Analysis ist gemacht worden. Man hat gezweifelt, ob sie zu Schärfung des Verstandes eben das beytrüge, was die gemeine Geometrie thut. Diese hat man gesagt, gewöhnet uns zu einer ordentlichen Art zu denken, die wir in andern Wissenschaften und in Geschäfften nachahmen können: Jene übet uns blos im Rechnen, und diese Fertigkeit können wir nirgends brauchen, als wo eine mathematische Kenntniß statt findet. Bey vielen Rechenmaschinen dürfte der Vorwurf nicht ganz un-

ge-

gegründet seyn; wahre und grosse Analysten kann er nicht treffen. Es ist falsch, daß man in der Analysis nicht eben wie in der Geometrie denken müsse. Die Rechnungen sind Schlüsse durch Zeichen ausgedrückt. Dieser mechanische Theil der Analysis, überhebt uns, nachdem der Verstand seine Anwendung auf eine vorgegebene Frage eingerichtet hat, auf einige Zeit der Mühe zu denken, wie eine Uhr uns der Mühe die Minuten zu zählen überhebt. Würde sich ein Barbar nicht irren, der den Gebrauch einer Uhr blos in ihrem Geklapper setzte, und von der Art sie aufzuziehen, zu stellen, und zu gebrauchen, keinen Begriff hätte? Unser Gedächtniß kann uns nicht allemahl alle die Sätze gegenwärtig darstellen die wir brauchen, wenn wir sie auch sonst schon von andern gelernt haben: Oft sind uns zu unsern Absichten Kenntnisse nöthig, zu deren Erforschung noch niemand, wenigstens der uns bekannt wäre, eine Veranlassung gehabt hat. In beyden Fällen sollen wir im Stan-

de

de seyn uns selbst helfen zu können. Darinnen bestehet der Nutzen der Analysis. Sie befreyet uns von der Last, alle Lehren die uns jemahls nützlich seyn könnten stets im Gedächtnisse zu behalten, und sie vermindert wenigstens die Furcht, daß wir Dinge nicht würden bewerkstelligen können, die man bisher noch nicht bewerkstelliget hat. Ihre Kunstgriffe sollen uns unterrichten, aus den Anfangsgründen, jede Kenntniß deren wir benöthigt sind herzuleiten; wir haben durch sie eine Menge von Kenntnissen in unserer Gewalt, von denen wir nur einige wirklich zu besitzen und zu gebrauchen verlangen. Der Analyste gleicht einem Manne der viel baar Geld hat, und dafür allemahl die Güter haben kann, die er verlangt, in so fern sie für baar Geld feil sind. Wären die drey übrigen Theile der Erde von eingebohrnen Einwohnern leer, so würde ich den Analysten mit dem Europäer vergleichen den die Schiffarth in den Stand setzet, welches Land ihm gefällt

fällt einzunehmen und anzubauen. Aber der letzte unterscheidet sich in einem wesentlichen Stücke von dem ersten; er hat Waffen mit denen er Menschen die länger und rechtmäßiger da wohnten als er, unter das Joch bringen oder ausrotten kann.

Einleitung.

§. 1. Man nennet dieienigen Grössen in einer gegebnen Gleichung, denen man nach und nach so viele Werthe geben, oder die man so groß annehmen kann, als man will: veränderliche; die übrigen aber, welche beständig einerlei bleiben, man mag die veränderlichen so groß annehmen als man will, beständige. Die erstern bezeichnet man mit den leztern Buchstaben des Alphabets, u, w, x, y &c. Die leztern hingegen mit den erstern a, b, c, d &c.

§. 2. Eine Gleichung ist von einem so hohen Grade, als viele Dimensionen dieienigen ihrer Glieder enthalten, welche die meisten Dimensionen haben. So ist z. E. eine Gleichung vom dritten Grade, wenn sie Glieder enthält, die von dreien Dimensionen, und keine, die von meh-

rern sind. Die Menge der Dimensionen aber wird, aus der Menge der veränderlichen Grössen erkannt, deren Produckt in einem Gliede vorkommt. So ist ein Glied von dreien Dimensionen, wenn in ihm das Produckt dreier veränderlicher Grössen anzutreffen ist; es mögen diese veränderlichen Grössen entweder gänzlich, oder nur zum Theil, einerlei; oder gänzlich verschieden sein. Folglich sind Ax^3, Axy^2, Ax^2y, $Axyz$, Axz^2 &c. sämmtlich Glieder von dreien Dimensionen, wenn man A als eine beständige; x aber y und z als veränderliche Grössen annimmt.

§. 3. Eine iede Gleichung, in der nur zwo veränderliche Grössen sind, und von denen bloß werden wir in der Folge reden, wird auf folgende Art geometrisch vorgestellt:

Man zieht in einer ebnen Fläche zwo gerade
fig. 1. unbestimmte Linien AB, NC, die sich in A unter einem gegebenen oder nach Belieben angenommenen Winkel durchschneiden. Die eine NC wird die Axe der Abscissen, die andre AB, die Axe der Applicaten; und A, der Anfangspunkt der Abscissen, genannt. Man giebt in der gegebnen Gleichung der einen veränderlichen Grösse, als x, nach und nach verschiedne Werthe, die durch die, aus dem Punkte A von der Axe der Abscissen abgeschnittnen Stücke AR, AS, AT, AQ, &c. vorgestellt werden. Die positiven

positiven Werthe nämlich werden durch solche Stücke vorgestellt, die nach C zu liegen, als AR, AS, AT &c. die negativen hingegen bezeichnet man durch die Theile AQ, AP &c. welche an die entgegen gesezte Seite fallen. Es ist offenbar, daß, man mag der einen veränderlichen Grösse einen Werth geben, welchen man will, dadurch auch die andre, als y, einen, oder mehrere bestimmte Werthe erhält. Denn, wenn statt x eine bestimmte Grösse gesezt wird so sind in der gegebenen Gleichung, ausser y, blos bestimmte und gegebene Grössen. Nun aber ist aus den ersten Gründen der Algebra bekannt, daß in dem Falle y einen, zween, oder mehrere Werthe habe, nachdem in der gegebenen Gleichung die erste, die zweite, oder eine höhere Potenz von y anzutreffen ist.* Folglich erhält y, für iede Abscisse AR, AS, AT, AQ, AP &c. denn so nennt man diese Stücke, einen oder mehrere bestimmte Werthe. Man ziehe daher durch die Punkte R, S, T, P, Q, &c. gerade Linien der Axe AB parallel, und trage alle positive Werthe von y, die z. E. zu der Abscisse AR gehören, auf die AB, von A aus, nach oben zu; so daß z. E. Aβ ein positiver, Aε ein negativer Werth von y ist, wenn man x = AR sezt.

* Man sehe Hrn Clairaut Algebra, nach der Uebersezung des Hrn Mylius p. 157. sqq Hrn Segners Analysis finitorum p. 296. u. a. m.

Man lege ferner durch β, ε &c. die Linien βF, εf der Axe AC parallel, welche mit der, durch R gezognen, Linie, in F und f zusammen stossen; so wird RF = Aβ, und Rf = Aε. Eben so verfährt man bei den übrigen Abscissen, und bestimmt auf diese Art so viele Punkte G, H, L, M, g, h, l &c. als man will, die man sich in einer Linie DFmNMfE vorstellt, von der man sagt, daß ihre Natur durch die gegebene Gleichung ausgedrückt werde, und daß sie von eben demselben Grade sei, von welchem die Gleichung ist. Die Linien RF, SG, Rf, Sg &c. werden Applicaten genennt; und man drückt gemeiniglich die Abscissen durch x, die Applikaten aber, durch y, aus.

§ 4. Wenn eine Abscisse ein Nichts wird, so fällt ihr Endpunkt in den Anfangspunkt A, und folglich die Applicate in die Axe der Applikaten Bb. „Also zeigen dieienigen Werthe von „y, welche man erhält, indem man in der ge„gebnen Gleichung x = o sezt, die Applikaten „an die selbst aus dem Anfangspunkte der Ab„scissen gezogen werden.” Wird hingegen eine Applikate ein Nichts, so fällt ein Punkt der Linie DHNE mit einem Punkte der Axe der Abscissen zusammen. „Folglich sind die Abscissen „At, Ar, AN &c., an deren Endpunkten die Li„nien DF NE von der Axe durchschnitten wird, „die Werthe von x, wenn man in der gegebnen „Gleichung y = o sezt.

§. 5. Um diese Art, die Gleichungen geometrisch vorzustellen, mit einem Beispiele zu erläutern, wollen wir die allgemeine Gleichung vom ersten Grade $y + Ax + B = o$ vornehmen. Man zieht zuerst die beiden Axen AC, AB; und nimmt alsdenn, nach Belieben, eine positive *fig.* 2. Absciſſe $AD = a$; so wird y, oder die Applikate $Df = - B - Aa$; woraus erhellet, daß überhaupt eine iede Applikate aus einem beständigen Theile, der $= B$ ist, und aus einem veränderlichen, der ein Product der beständigen Grösse A in die zu der Applikate gehörende Absciſſe ist, besteht. Man mache also $DF = - B$, und ziehe durch F eine gerade Linie, der Axe AC parallel welche der andern Axe in H begegnet. Man mache ferner $HP = 1$, und setze $PQ = - A$, der Axe AH parallel; so wird die, durch die Punkte H und Q gehende gerade unbestimmte Linie dieienige sein, deren Natur durch die Gleichung $y + Ax + B = o$ ausgedrückt wird. Denn es ist überhaupt eine iede Applikate, als $Df = DF + Ff = - B - A \times HF$, weil $fF : QP = HF . HP$, oder $fF : - A = HF : 1$, und daher $Ff = - A \times HF$ ist.

§. 6. Ausserdem ist noch zu bemerken, daß eine Linie von einem gewissen Grade, beständig von eben demselben Grade bleibt, man mag ihre Axen verändern, wie man will; welches aus folgenden Betrachtungen leichte erhellen wird.

fig. 3. Es sei ED eine Linie von einem gewissen Grade; AL die Axe der Abscissen, AC die Axe der Applikaten. Man ziehe nach Belieben zwo andre gerade Linien FG, FH zusammen, und nehme die eine FH als die neue Axe der Abscissen; die andre FG, als die neue Axe der Applikaten, an. Man lege durch F eine der AC parallele Linie, welche die AL in f durchschneidet, und setze Af = a, Ff = b. Es sei AB eine beliebige Abscisse, zu der die Applikate BD gehört, so wird, wenn man DH der FG parallel zieht, FH, die neue Abscisse; HD, die neue Applikate, sein, welche zu eben dem Punkte D gehört. Wenn man daher FI, MH, deren die erste die BD in N, die andre, in M, durchschneidet, der AL; und HI, der AC, parallel macht, so sind in den Dreiecken DMH, FHI die Winkel beständig von einerlei Grösse, man mag AB so groß annehmen, als man will. Folglich ist auch das Verhältnis ihrer Seiten gegen einander beständig. Wir wollen daher folgende Proportionen annehmen: DH : HM = 1 : c; DH : DM = 1 : f; FH : FI = 1 : d; FH : HI = 1 : e; so wird, wenn wir iede der neuen Abscissen, als FH, z; und die dazu gehörige Applikate, als DH, u nennen; HM = BL = cu; FI = fL = dz; HI = MN = ez; DM = fu. Da nun die Abscisse AB = Af + fL − BL und die Applikate BD = DM + BN − MN = DM + Ff − MN ist, so wird überhaupt $x = a + dz - cu$; $y = b + fu - ez$.

Unter

Unter diesen allgemeinen Formeln sind alle mögliche übrige Fälle begriffen. Denn gesezt man hätte z. E. bloß die Axe der Applikaten, der Lage nach, verändert, alles übrige aber unverändert gelassen; so würde nicht nur Af und fF = o sein, sondern auch die Linie HI verschwinden; folglich e = o, und FI = FH werden. Daher hätte man statt x, z — cu; statt y aber fu, in die gegebne Gleichung zu setzen, um eine neue zu erhalten, in der u und z die veränderlichen Grössen sind.

Man sieht aber leicht, daß überhaupt eine solche neue Gleichung zwischen u und z, unmöglich von einem höhern Grade sein kan, als die gegebne zwischen x und y war; weil so wol statt x, als statt y, bloß solche Grössen gesezt werden, die gleichfalls nur von einer einzigen Dimension sind. Folglich kan die Linie ED, welche durch eine Gleichung von einem gewissen Grade zwischen x und y ausgedrückt wird, niemahls durch eine Gleichung von einem höhern Grade angedeutet werden; oder: die Linie ED bleibt beständig von einerlei Grade, man mag die Axen verändern wie man will.

§. 7. Wenn allen veränderlichen Grössen einer Gleichung, ausser einer x, gewisse Werthe gegeben werden; so erhält man eine Gleichung in der x die unbekannte Grösse ist. Diese läßt sich, wenn sie vom zweiten Grade ist, und wenn x in

ihr keinen Exponenten hat, der nicht eine ganze positive Zahl ist, in folgende Form $x^2 + Ax + B = 0$ bringen, indem A und B beständige Grössen bezeichnen. Daher wird $x^2 + Ax = -B$ und $x^2 + Ax + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}A^2 - B$, und $\pm\sqrt{(x^2 + Ax + \frac{1}{4}A^2)} = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$. Nun aber ist $x^2 + Ax + \frac{1}{4}A^2$ das Quadrat von $\pm x \pm \frac{1}{2}A$. Also ist $\pm x \pm \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$, und daher $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$.

Also hat eine jede Gleichung vom zweiten Grade $x^2 + Ax + B = 0$ zwo Wurzeln, oder die unbekannte Grösse in ihr, x, hat zween Werthe $-\frac{1}{2}A + \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$ und $-\frac{1}{2}A - \sqrt{(\frac{1}{4}A - {}^2B)}$, die entweder beide würklich, wenn $\frac{1}{4}A^2 > B$ ist, oder beide unmöglich sind, wenn $\frac{1}{4}A^2 < B$ ist.

Die Summe dieser Wurzeln ist $= -A$, und das Produckt aus ihnen $= (-\frac{1}{2}A + \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}) \times (-\frac{1}{2}A - \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}) = B$. Weil nun A überhaupt die Summe der Coefficienten von der ersten Potenz von x; und B, die Summe der Glieder, in denen kein x ist, vorstellt; so folgt, "daß in einer jeden algebraischen Glei„chung vom zweiten Grade, deren eine Hälfte „= 0 ist, und in der das Quadrat der unbekann„ten Grösse keinen Coefficienten hat, die Sum„me der Coefficienten von der ersten Potenz der „unbe-

„unbekannten Grösse, mit dem entgegen gesezten „Zeichen genommen, die Summe der Wurzeln; „hingegen die Summe der Glieder, in denen die „unbekannte Grösse gar nicht ist, das Produkt „aus beiden Wurzeln ist.

Auch sieht man leicht, daß sich die Hälfte $x^2 + Ax + B$ der gegebnen Gleichung in zween Theiler $x + \frac{1}{2}A - \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$ und $x + \frac{1}{2}A + \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$, davon ein ieder $= 0$ ist, und folglich eine der Wurzeln enthält, auflösen lasse. Denn das Produckt dieser beiden Theiler ist $x^2 + \frac{1}{2}Ax + x\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)} + \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)} - x\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)} - \frac{1}{2}A\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)} - \frac{1}{4}A^2 + B = x^2 + Ax + B$.

Ausserdem hat die eine Hälfte der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$ keine Theiler, und es ist allemahl wenn sie sich durch $x + a$ theilen läst, $-a$ eine Wurzel der Gleichung. Denn man nenne den durch die Theilung entstehenden Quotienten Q, so wird $(x + a)Q = x^2 + Ax + B$. Macht man also $x = -a$, so wird $a^2 - Aa + B = 0$, woraus erhellet, daß $-a$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$ sei.

Analytische Abhandlung
von den
Kegelschnitten.

Erstes Buch.
von den Linien vom zweiten Grade überhaupt.

§. 1. Eine iede Gleichung vom zweiten Grade muß zwar Glieder haben, die von zwoen Dimensionen sind, keine aber, die mehrere haben. (Einl. §. 2.) Folglich kan sie bloß Glieder von keiner, von einer, oder von zwoen Dimensionen, und sonst keine, enthalten; indem wir überhaupt annehmen, daß in einer ieden Gleichung, von der wir reden, die veränderlichen Grössen keine Exponenten haben, die nicht ganze und positive Zahlen sind.

§. 2. Wenn die Gleichung zwo veränderliche Grössen, x und y, enthält, so ist in einem ieden Gliede von zwoen Dimensionen entweder x^2, oder xy, oder y^2; in iedem Gliede von einer

ner Dimension aber, x oder y. Die Glieder von keiner Dimension haben weder x noch y. Folglich lassen sich alle Glieder einer Gleichung vom zweiten Grade, in der zwo veränderliche Grössen x und y sind, in sechs Classen bringen. Denn in einem ieden vor ihnen kommt entweder y^2, oder xy, oder x^2, oder x, oder y, oder endlich weder x noch y, vor (§. 1.) und es ist daher $y^2 + axy + by + cxx + dx + e = 0$ eine allgemeine Gleichung, welche alle mögliche Gleichungen vom zweiten Grade, in denen zwo veränderliche Grössen x und y sind, unter sich begreift. Ich sage diese Gleichung sei allgemein. Denn daß sie in Ansehung der Zahl der Glieder allgemein sei, ist eben gezeigt worden. In Ansehung der beständigen Grössen aber ist sie allgemein, weil keine von ihnen von der andern abhängt, oder eine eingebildete Grösse hat; indem wir überhaupt nur mit denienigen Gleichungen vom zweiten Grade zu thun haben, in denen die beständigen Grössen alle würklich sind. Daß y^2 keinen Coefficienten hat, schadet ihrer Allgemeinheit nichts, da alle übrige Glieder Coefficienten haben. Denn man kan aus ieder Gleichung den Coefficienten eines einzigen Gliedes, als y^2, durch die Theilung leichte fortschaffen.

§. 3. Eine iede Gleichung vom zweiten Gradt giebt entweder eine krumme, oder aus geraden zusammengesezte Linie. Das leztere geschieht,

wenn

wenn sie sich in zween Theiler auflösen läst, in deren iedem x und y rationell, oder von Wurzelzeichen befreit sind. Denn, gesezt, es sei $(y + \alpha x + \beta)(y + \gamma x + \delta) = 0$ eine solche Gleichung vom zweiten Grade; so ist klar, daß, es mag x bestimmt werden wie man will, y zween Werthe erhält, deren der eine aus dem Theiler $y + \alpha x + \beta = 0$, der andre aus $y + \gamma x + \delta = 0$ bestimmt wird. (Einl. §. 7.) Nun aber drücken beide Gleichungen die Natur einer geraden Linie aus. (Einl. §. 5.) Folglich stellt die Gleichung $(y + \alpha x + \beta) \times (y + \gamma x + \delta) = 0$ das System zwoer geraden Linien vor.

§. 4. Es kan ferner eine Linie vom zweiten Grade von einer geraden höchstens nur in zweenen Punkten durchschnitten werden. Denn man setze, daß die Linie vom zweiten Grade
fig. 4. ABED von der geraden AC, in mehr als zweenen Punkten, z. E. in dreien A, B, C, durchschnitten werde. Man nehme diese Linie als die Axe, und einen beliebigen Punkt in ihr, G, als den Anfangspunkt, der Abscissen an; so ist klar, daß man, es mag die Axe der Applikaten liegen wie man will, um die Werthe der Abscissen GA, GB, GC zu erhalten, in der die Linie ABED ausdrückenden Gleichung, $y = 0$ setzen müsse. (Einl. §. 4.) Nun aber wird diese Linie beständig durch eine Gleichung von zweiten Grade ausgedrückt, die Axen mögen liegen, wie man will: (Einl.

(Einl. §. 6.) und $y^2 + axy + by + cxx + dx + e = 0$ ist die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade. (§. 2.) Also sind GA, GB, GC die Werthe von x, die man erhält, wenn man in der eben angeführten Gleichung $y = 0$ macht. Nun aber wird in dem Falle $cx^2 + dx + e = 0$ welche Gleichung unmöglich mehr als zwo Wurzeln haben kan. (Einl. §. 7.) Sie müste aber deren drei haben, nämlich GA, GB, GC, wenn die Linie AC der Linie vom zweiten Grade in dreien Punkten begegnete. Also ist es unmöglich, daß eine Linie vom zweiten Grade von einer geraden in dreien, oder mehrern Punkten durchschnitten werden könnte.

§. 5. Wenn die Axen einer Linie vom zweiten Grade so liegen, daß iede Abscisse zwo einander gleiche Applikaten hat, davon die eine positiv, die andre aber negativ ist: so wird die Axe der Abscissen ein Durchmesser genannt; und man sagt von den Applikaten: daß sie zu ihm geordnet sind. Die Spitzen des Durchmessers sind dieienigen Punkte, in welchen er die Linie vom zweiten Grade durchschneidet; und man versteht, wenn von der Grösse des Durchmessers die Rede ist, denienigen Theil desselben, welcher zwischen beiden Spitzen liegt.

§. 6. Wenn also eine Linie von zweiten Grade durch eine Gleichung ausgedrückt wird, der alle dieienigen Glieder fehlen, in welchen die erste

Potenz

Potenz von y, d. i. von der Grösse, welche die Applikaten bezeichnet, ist; so sind die Abscissen, Abscissen eines Durchmessers, und die Applikaten zu dem Durchmesser geordnet. Denn die Summe der Coefficienten von der ersten Potenz von y, ist die Summe der Applikaten. (Einl. §. 7.) Ist also iene ein Nichts, so verschwindet auch diese, und iede Abscisse hat zwo Applikaten, deren Summe = o ist; von denen folglich die eine positiv, die andre negativ, eine aber der andern gleich, ist.

§. 7. Man kan also einer Linie vom zweiten Grade einen Durchmesser ziehen, der mit den, ihm zugeordneten, Linien, einen gegebnen Winkel macht.

fig. 5. Zu dem Ende ziehe man zwo gerade Linien ac, bc unter dem gegebenen Ordnungswinkel acb zusammen. Man mache $bc = \frac{1}{2}a$, und ziehe aus b die gerade Linie ba, welche die ac unter einem Winkel bac, dessen sinus $= \frac{1}{2}a \times$ sin. c ist, durchschneidet; so wird der Winkel abc bekannt.

Wenn daher ECL die Linie vom zweiten Grade, AF, die Axe, und A der Anfangspunkt der Abscissen ist; so ziehe man die Axe der Applikaten Aa unter den gefundnen Winkel aAF=abc. Weil nun die Gleichung $y^2 + axy + by + cxx + dx + e = 0$ überhaupt die Natur einer Linie vom zweiten Grade ausdrückt, die Axen mögen

liegen

liegen wie man will; (Einl. §. 6 und I. §. 2.) so wird in derselben x auch die Abscissen von AF, und y, die, der Aa parallelen, Applikaten bezeichnen können.

Man mache also AM = 1, und ziehe BM = $\frac{1}{2}$a der Aa parallel, wie auch durch A und M die gerade Linie AG. Man schneide von der Axe der Applikaten den Theil AD = $\frac{1}{2}$b ab, und ziehe DH, der AG parallel, so ist diese Linie der verlangte Durchmesser.

Denn es sei EH eine Applikate die zu der, nach Gefallen angenommnen Abscisse DH gehört; so wird der Theil EF von ihr die zu der Abscisse AF gehörige Applikate; GH = $\frac{1}{2}$b; und FG : BM = AF : AB, oder FG : $\frac{1}{2}$ a = x : 1, und daher FG = $\frac{1}{2}$ax, sein. Nennt man also eine jede der neuen Applikaten, als HE, u; die dazu gehörende Abscisse, als DH, z; und sezt AB : AM = 1 : m; so wird $u = \frac{1}{2}b + y + \frac{1}{2}ax$, oder $y = u - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ax$ und $x = \frac{z}{m}$. Wenn man daher diese Werthe in die Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$ bringt, so erhält man $u^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2x^2 - bu - aux + \frac{1}{2}abx + aux - \frac{1}{2}abx - \frac{1}{2}a^2x^2 + bu - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}abx + cx^2 + dx + e = 0$, oder $u^2 - \frac{1}{2}abx - \frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{4}b^2 + cx^2 + dx + e = 0$; oder endlich $u^2 - \frac{ab}{2m}z - \frac{a^2}{4m^2}z^2 - \frac{1}{4}b^2 + \frac{c}{m^2}z^2 + \frac{d}{m}z + e = 0$.

Weil

Weil nun in dieser Gleichung alle Glieder fehlen, in denen die erste Potenz von u ist; so folgt, daß DH ein Durchmesser sei, zu dem alle, der Aa parallele, Applikaten geordnet sind. (l. §. 6.)

Daß aber ferner EHD = BMA der gegebne Winkel bca sei, sieht man leicht. Denn da ab : bc = sin. c : sin. a, und bc = $\frac{1}{2}$a; sin. a aber = $\frac{1}{2}$a. sin. c ist; so wird ab = 1; und ABM = abc, weil aAF = abc ist. Also sind die beiden Dreiecke ABC, abc einander ähnlich und gleich. Daher wird ACB = acb. *)

§. 8. Man wird demnach allemahl auch einen Durchmesser finden können, dem seine Applikaten unter einem rechten Winkel zugeordnet sind; und man sieht daher, daß iede Linie vom zweiten Grade einen Durchmesser von der Art habe, welchen man den Hauptdurchmesser, oder auch schlechthin die Axe nennt.

§. 9. Es ist ferner klar, wenn man nach Belieben zwo parallele gerade Linien EL, el zieht, die zu beiden Seiten in der Linie vom zweiten Grade aufhören, und sie in h und H in zwo gleiche Hälften EH = HL, und eh = hl, theilt; daß die durch h und H gehende gerade Linie der Durchmesser sei, zu dem he und EH geordnet sind. Denn es ist ein solcher Durchmesser würklich da; (l. §. 7.) und ergeht durch die Punkte h und H (l. §. 5) §. 10.

*) Euclid. Elem. VI. 6.

§. 10. Es sein PN, PE zwo gerade Linien deren iede die Linie vom zweiten Grade in zweenen Puncten B, E, und M, N, durchschneidet, und die beide in P zusammenstossen. Wenn man die eine AE als die Axe, und einen beliebigen Punkt in ihr, A, als den Anfangspunkt der Abscissen: die Axe aber der Applikaten der andern PN parallel, annimmt; so werden die beiden Werthe von x, die man aus der Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = o$ erhält, wenn man $y = o$ sezt, AB und AE sein. (Einl. §. 4.) Nun aber wird, wenn $y = o$ ist, $cx^2 + dx + e = o$ und daher $x^2 + \frac{d}{c} x + \frac{e}{c} = o$. Also ist $x^2 + \frac{d}{c} x + \frac{e}{c} = (x + AB) \times (x + AE) = o$. (Einl. §. 7.) und folglich $y^2 + axy + by + c \times (x + AB) \times (x + AE) = o$. Weil nun die beiden Werthe von y, PM und PN sind, wenn $x = AP$ ist; so werden PM, PN die beiden Wurzeln der Gleichung $y^2 + ay \times AP + by + c \times (AP + AB) \times (AP + AE) = o$. Folglich wird, da $c \times (AP + AB) \times (AP + AE)$ oder $c \times PB \times PE$ das Produckt dieser beiden Wurzeln ist, (Einl. §. 7.) $c \times PB \times PE = PM \times PN$, und daher $1 : c = BP \times PE : PM \times PN$. Auf eben die Art erhält man, wenn mQ, Qn zwo andre Applikaten sind, die zu einer nach Belieben angenomm-

nommnen Abscisse AQ gehören, $1 : c = QB \times QE : mQ \times Qn$, und daher $BP \times PE : PM \times PN = QB \times QE : mQ \times Qn$. „Wenn man daher „eine gerade Linie, die der Linie vom zweiten „Grade in zween Punkten begegnet, zu der „Axe der Abscissen annimmt, so ist das Rechteck „von zwoen beliebigen Applikaten, die beide „aus einerlei Punkte der Axe gezogen sind, zu „dem Rechtecke aus den beiden Theilen der „Axe, welche zwischen diesen Punkte, und den „Punkten, in denen die Axe der Linie vom „zweiten Grade begegnet, liegen, in einem be„ständigen Verhältnisse $c : 1$.

§. 11. Wenn $c = 0$ ist, ist es nicht möglich, daß die Axe PQ der Linie vom zweiten Grade in mehr, als einem Punkte B begegnen könnte, weil alsdenn $y^2 + axy + by + dx + e = 0$. wird, und folglich, für $y = 0$, x nur einen einzigen Werth $= -\frac{e}{d} = AB$ (Einl. §. 4.) bekommt. Also ist $dx + e = d(x + AB)$, und $y^2 + axy + by + d(x + AB) = 0$. Wenn also $x = AP$ ist, so wird, wie vorher, $PM \times PN = d \times PB$; und wenn $x = AQ$ ist, $mQ \times Qn = d \times BQ$. Also ist $PM \times PN : Qm \times Qn = PB : QB$. „Wenn man daher „eine gerade Linie als Axe annimmt, die der „Linie vom zweiten Grade nur in einem einzi„gen

„gen Punkte begegnen kann, welchen man zum „Anfangspunkte der Abscissen macht, so ist „das Produckt von den Applikaten die zu einer „bel iebigen Abscisse gehören, zu dieser Abscisse „selbst, in einem beständigen Verhältnisse.„

Das zweite Buch

Von den Kegelschnitten überhaupt.

§. 1. Es ist oben gezeigt worden, (I. §. 3.) daß die Linie vom zweiten Grade aus geraden zusammengesezt sei, wenn sich ihre Gleichung in zween rationelle Theiler auflösen läst. Um also diese Fälle von den übrigen zu unterscheiden, wollen wir in der allgemeinen Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = o$, $\frac{1}{4}a^2 - c = m^2$, $\frac{1}{2}ab - d = n$ und $\frac{1}{4}b^2 - e = \frac{n^2}{4m^2} \pm p$, setzen, welches ihrer Allgemeinheit nichts schadet, da statt dreier Grössen c, d, e, eben so viel neue m^2, n, p, die eben so wenig, als c, d, e, von einander abhängen, angenommen werden. Dadurch aber erhalten wir folgende Gleichung (B) $y^2 + axy + by + (\frac{1}{4}a^2 - m^2) x^2 + (\frac{1}{2}ab - n) x + \frac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$, welche zu unsrer Absicht bequemer ist, als die vorige. Denn weil man aus ihr erkennt, daß $y = -\frac{ax - b}{2} \pm \sqrt{(m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2} \pm p)}$ sei, (Einl. §. 7.) und $m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2}$ das Quadrat von $mx + \frac{n}{2m}$ ist, so sieht man so gleich, daß $\sqrt{(m^2 x^2 +}$

$nx + \frac{n^2}{4m^2} \pm p$) irrational sei, und daß folglich die Gleichung (B) sich nicht in rationelle Theiler auflösen lasse, wenn p nicht $= 0$ ist. (Einl. §. 7.) In dem Falle, da nämlich p nicht $= 0$ ist, nennt man die Linien vom zweiten Grade, deren Natur diese Gleichung ausdrückt, in eigentlicherm Verstande, Kegelschnitte: von welcher Benennung weiter unten die Ursache angegeben werden soll. (III. §. 7. seqq.)

§. 2. Das erste, so wir hieraus folgern, ist: daß ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt werde, wenn man fünf Punkte giebt, durch die er gehn soll. Die Punkte aber müssen so liegen, daß, wenn man durch iede zween von ihnen gerade Linien zieht, in keine derselben Linien mehr als die zween Punkte fallen. Denn fielen mehr als zween von ihnen in eine gerade Linie, so würde diese Linie dem Kegelschnitte in dreien Punkten begegnen müssen, welches unmöglich ist. (I. §. 4.) Es sein also die 5 Punkte I, B, E, F, C gegeben. Um den durch sie gehenden Kegelschnitt ohne viele Weitläuftigkeiten zu bestimmen, so ziehe man nach Belieben durch zween von ihnen, als B und C die Axe der Abscissen, und durch einen von den übrigen, als E, die Axe der Applikaten DK. Weil B und C Punkte im Kegelschnitte sind, so werden fig. 7.

DB und DC die Werthe von x sein, wenn man in der allgemeinen Gleichung (B) $y = o$ sezt. (Einl. §. 4.) Nun aber erhält man für $y = o$, die Gleichung $(\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$, Folglich ist, indem man AB, α; AC, β; nennt, I. $(\frac{1}{2}ab - n) : (\frac{1}{4}a^2 - m^2) = \alpha + \beta$ und II. $(\frac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p) : (\frac{1}{4}a^2 - m^2) = \alpha\beta$. (Einl. §. 7.) Auf eben die Art wird $y = DE$, wenn $x = o$ ist. Also ist, wenn man ED, ω nennt, aus der Gleichung (B) III. $\omega^2 + b\omega + \frac{b^2}{4} - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$. Man ziehe ferner aus den übrigen Punkt, I und F, die Applikaten IH, FG, und wenn DH, γ; DG, ε; IH, ϕ; FG, ψ; so wird $y = \phi$ wenn $x = \gamma$, und $= \psi$, wenn $x = \varepsilon$ ist. Daher erhält man die Gleichungen IV. $\phi^2 + \alpha\gamma\phi + b\phi + \frac{a^2}{4}\gamma^2 - m^2\gamma^2 + \frac{1}{2}ab\gamma - n\gamma + \frac{b^2}{4} - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$. V $\psi + a\varepsilon\psi + b\psi + \frac{a^2}{4}\varepsilon^2 - m^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}ab\varepsilon - n\varepsilon + \frac{b^2}{4} - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$. Weil nun in allen diesen 5 Gleichungen nur fünf unbekannte Grössen, a, b, m, n, p, sind, indem α, β, γ, ε, ϕ, ψ und ω gegeben

geben sind; so kan man aus den vier leztern Gleichungen, vier derselben b, n, m, p, die in ieder von ihnen vorkommen, durch die gegebnen, und durch die fünfte Grösse a bestimmen, diese aber, indem man die gefundnen Werthe in die erste Gleichung bringt, erhalten. Es werden also auf solche Art alle beständige Grössen in der Gleichung für den Kegelschnitt, und dadurch alle Punkte desselben, bekannt.

Wäre $p = o$, und folglich die Linien IBFC kein Kegelschnitt, so wären nur vier Grössen unbekannt; und also nur vier Gleichungen nöthig. Es würde daher in dem Falle die Linie, durch vier gegebne Punkte vollkommen bestimmt.

§. 3. Also ist es nicht möglich durch fünf gegebne Punkte mehr als einen Kegelschnitt zu ziehn; und zween verschidnen Kegelschnitten können sich folglich höchstens in vier Punkten durchschneiden.

§. 4. Es haben ferner die Kegelschnitte für den übrigen Linien vom zweiten Grade dieses besondre, daß, auch zu würklichen Abscissen, unmögliche Applikaten gehören. Denn man kann, wenn p nicht $= o$ ist, wie man leicht sieht, dem x allemahl einen würklichen Werth geben, der die Grösse $m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2} \pm p$

negativ, und folglich $\sqrt{(m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2}} \pm p)$ eingebildet macht. Dieses aber geht nicht an, wenn $p = o$ ist. Wäre $m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2}$ negativ, z. E. $= -- P$, so müste $mx + \frac{n}{2m} = \sqrt{-P}$, und folglich x unmöglich sein, weil m und n würkliche Grössen sind. Also kan y, welches beständig $= -\frac{ax--b}{2} \pm \sqrt{(m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2} \pm p)}$ ist, (II. §. 1.) wenn p nicht $= o$ ist auch bei würklichen Werthen des x unmöglich werden: d. i. es können die Applikaten eines Kegelschnittes unmöglich sein, gesezt daß auch ihre Abscisse würklich ist.

§. 5. Unterdessen ist es eben daher klar, daß durchgehends iede Abscisse entweder zwo würkliche, oder zwo unmögliche Applikaten hat, weil, wenn $m^2 x^2 + nx \pm p$ positiv ist, beide Werthe von y würklich; und wenn diese Grösse negativ ist, beide unmöglich sind. Man könnte den einzigen Fall ausnehmen wenn (A) $m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2} \pm p = o$ ist. Allein es hat alsdenn die Abscisse dennoch zwo Applikaten, obgleich eine in die andre fällt, und eine der andern vollkommen gleich wird. Denn es ist

in dem Falle die erste Hälfte der Gleichung (B) ein Quadrat, nämlich $y^2 + axy + by + \frac{1}{4} a^2 x^2 + \frac{1}{2} abx + \frac{1}{4} b^2 = 0$, und es hat folglich y zween Werthe, deren ein jeder $= -\frac{ax}{2} - \frac{1}{2}b$ ist. Alle Werthe die nicht Wurzeln der Gleichung (A) sind, müssen, wenn man sie statt x sezt, machen, daß die Grösse $m^2 x^2 + nx + \frac{n^2}{4 m^2} \pm p$ entweder positiv oder negativ: folglich, daß ein ieder der Werthe von y entweder würklich oder unmöglich wird. Also haben die Applikaten, deren Abscissen die Wurzeln der Gleichung (A) sind, diese besondre Eigenschaft, daß alle zwischen sie fallende Applikaten entweder würklich, oder unmöglich; die ausser sie fallenden aber im ersten Falle, unmöglich, im andern, würklich sind. Man sagt von ihnen daß sie den Kegelschnitte berühren.

§. 6. Wenn man also die Berührungslinie MQ eines Kegelschnittes zu der Axe der Applikaten, und den Berührungspunkt M zum Anfangspunkte der Abscissen macht, so wird, die Axe der Abscissen mag liegen wie man will, weil M im Kegelschnitte liegt, wenn $x = 0$ ist, auch $y = 0$; (Einl. §. 4.) und folglich in der Gleichung (B) $\frac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \overline{+ p} = 0$. Weil aber MQ über dieses eine berührungs Linie ist, so Fig. 5.

müssen, wenn $x = o$ ist, beide Werthe von $y = -\frac{ax}{2} - \frac{1}{2}b$, oder $= -\frac{1}{2}b$, werden. (§. praec.) Folglich ist, da der eine Werth von $y = o$ ist, $b = o$ und auch der andre Werth von $y = o$; woraus erhellet, daß eine Berührungslinie dem Kegelschnitt nicht weiter, als im Berührungspunkte, antreffen könne, man mag sie verlängern, wie man will; und denn daß $y^2 + axy + n(\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 - nx = o$ die allgemeine Gleichung für einen Kegelschnitt sey, den die Axe der Applikaten im Anfangspunkte der Abscissen berührt.

Man erhält also, für $y = o$, beständig zween Werthe von x, davon der eine $= o$, der andere $= n : (\frac{1}{4}a^2 - m^2)$ ist; und es ist dieser leztere allezeit von einer bestimmten Grösse, ausser wenn $\frac{1}{4}a^2 = m^2$ ist. Denn verschwinden kan er niemahls, weil sonst $n = o$, und folglich auch $p = o$ würde, da $\frac{n^2}{4m^2} = p$ ist, welches unmöglich geschehen kan. (II. §. 1.) Also ist es offenbar, daß eine iede aus M gehende gerade Linie, die keine Berührungslinie ist, den Kegelschnitt, noch ausser M, in einem Punkte antreffe, den Fall, da $m^2 = \frac{1}{4}a^2$ ist, ausgenommen.

Findet aber dieser Fall statt, so ist $y^2 + axy - nx = o$, und folglich $y = -\frac{ax}{2} \pm \sqrt{}$

($\frac{1}{4}a$

$(\frac{1}{4}a^2x^2 + nx.)$ Da nun die Grösse $\sqrt{(a^2x^2 + nx)}$, so lange x positiv ist, beständig grösser ist, als $\frac{ax}{2}$; und von den beiden Werthen des y der eine allemahl positiv, der andre negativ ist, so lange $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2x^2 + nx)}$ grösser als $\frac{ax}{2}$ bleibt; so folgt, daß iede positive Abscisse, sie mag so groß seyn, als man will, eine positive und eine negative Applikate hat. Man sieht hieraus, daß in dem Falle die Axe der Abscissen Mt unmöglich zwischen die Berührungslinie MQ und den Kegelschnitt fallen könne. Denn wenn man nach Gefallen eine positive Abscisse Mt nimmt, zu der die beiden Applikaten tS, tm, gehören, und durch M, S und M, m gerade Linien zieht, so kan die Axe Mt, weil der Punct t zwischen S und m liegt, und beide Punkte S, m, auf einerlei Seite der Berührungslinie liegen, unmöglich in den Winkel QMS, oder NMm fallen, wenn man sie auch noch so weit verlängert. Nun aber muß eine iede Linie die zwischen die Berührungslinie und den Kegelschnitt fällt, einen solchen Winkel, als QMS, den QM mit einer Chorde macht, theilen. Also ist es offenbar, daß, wenn m = o ist, die aus M gehende Axe nicht zwischen die Berührungslinie, und den Kegelschnitt falle.

Aus allen diesem zusammen erhellet, es sey ede

iede Berührungslinie, als QM, mit dem Kegelschnitte so genau verbunden, daß durch den Berührungspunkt keine einzige gerade Linie zwischen dem Berührungswinkel gezogen werden kan; die nämlich den Kegelschnitt weiter nicht, als in selbigem Punkte, antrift.

§. 7. Es folgt ferner aus dem 5. §. daß, wenn eine Applikate als aI den Kegelschnitt in a berührt, und ef die Axe der Abscissen ist, das Rechteck aus beiden, zu dem Punkte I gehörigen Applikaten, das Quadrat von aI sey.

Auf eben die Art erhellet, wenn die Axe der Abscissen eG den Kegelschnitt in G berührt, indem man IG als die Applikate zu einer beliebigen Abscisse ansieht, daß das Rechteck aus den beiden Stücken der Axe, die zwischen dem Punkte I, und den Punkten liegen, in denen IG dem Kegelschnitte begegnet, dem Quadrate aus IG gleich sei.

§. 8. Folglich ist das Verhältniß $aI^2 : IG^2$ beständig; (I. §. 10) oder es wird, wenn Be der aI parallel ist, und den Kegelschnitt in B und E; die IG aber in e durchschneidet, $aI^2 : IG^2 = Be \times Ee : eG^2$. Es lassen sich noch verschiedene andre Sätze von der Art aus der Verbindung des vorhergehenden §. mit dem 10 §. im ersten Buche herleiten, die wir aber, da dieses wenige Schwürigkeiten macht, der Kürze wegen, weglassen.

§. 9.

§. 9. Wir kommen also nunmehr zu der Aufgabe: an einen gegebenen Punkt des Kegelschnittes Mm eine Berührungslinie MN zuziehen, welche auf folgende Art aufgelöst wird. *fig. 8.*

Es sein An, Aa die beiden Axen, und MP eine der Aa aus M gezogne parallele Applikate. Wenn man die durch M der AN parallel gehende Linie $q\pi$ als die Axe, und M als den Anfangspunkt der Abscissen annimmt; AP, m; PM, n; iede neue Abscisse, als $M\pi$, z; die dazu gehörige Applikate aber πm, u nennt; so wird überhaupt $x = m + z$ und $y = n + u$, indem x die Abscissen der AN, und y, die dazu gehörigen, der Aa parallelen, Applikaten bezeichnet. Sezt man also die Werthe von x und y in die Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$, so erhält man $u^2 + 2nu + n^2 + auz + anz + amu + amn + bu + bn + cz^2 + 2cmz + cm^2 + dz + dm + e = 0$. Wir bedienen uns hier dieser allgemeinen Gleichung, weil sie kürzer ist als die Gleichung (B) im 1. §. Da also der Kegelschnitt Mm die Axe Mq selbst im Anfangspunkte der Abscissen M durchschneidet, so wird $u = 0$, wenn $z = 0$ ist; (Einl. §. 4 und daher $n^2 + amn + bn + cm^2 + dm + e = 0$. Also ist $u^2 + 2nu + auz + anz + amu + bu + cz^2 + 2cmz + dz = 0$. Man ziehe aus einem

nem Punkte Q der Berührungslinie MQ, die Qq der Aa parallel, und setze daß $MQ : Mq = 1 : \delta$, $MQ : Qq = 1 : f$ sey. Man nehme die Berührungslinie MQ nunmehr als die Axe der Applikaten an, alles übrige aber lasse man unverändert; und nenne die neuen Abscissen t, und die dazu gehörigen Applikaten s; so wird $u = fs$, $z = t - \delta s$ (Einl. §. 6.) folglich, wenn $t = o$ ist, $u = fs$, $z = -\delta s$. Daher erhält man für den Fall $t = o$ die Gleichung $f^2 s^2 + 2nfs - af\delta s^2 - an\delta s + amfs + bfs + c\delta^2 s^2 - 2c\delta ms - d\delta s = o$. Da nun MQ eine Berührungslinie in M ist, so werden, wenn $t = o$ ist, beide Werthe von $s = o$, (II. §. 6.) und folglich ist $2nf - an\delta + amf + bf - 2c\delta m - d\delta = o$, und daher $2nf \times MQ - an\delta \times MQ + amf \times MQ + bf \times MQ - 2c\delta m \times MQ - d\delta \times MQ = o$. Nun aber ist $f \times MQ = Qq$; $\delta \times MQ = Mq$; und daher $(2n + am + b) \times Qq - (an + 2cm + d) \times Mq = o$.

Man mache demnach $Mq = 2n + am + b$, und ziehe $Qq = an + 2cm + d$ der Aa parallel, so ist MQ die verlangte Berührungslinie.

§. 10. Der Theil der Axe PN, dessen einem Endpunkte N, die Berührungslinie, in dem andern P, die aus dem Berührungspunkte gehen-

de

de Applikate, die Axe AN durchschneidet, und welche die Subtangente genennt wird, ist nunmehr leichte zu berechnen. Denn es ist Qq: qM = MP: PN, oder an + 2cm + d: 2n + am + b = n: PN, und daher PN = $(2n^2 + amn + bn):(an + 2cm + d)$ Nennt man also überhaupt die aus einem Berührungspuncte gehende Applikate, y; die dazu gehörige Abscisse, X; und die Subtangende S; so ist $S = (2y^2 + axy + by):(ay + 2cx + d)$; und daher (A) $y^2 + \frac{1}{2}a\,xy + \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}aSy - csx - \frac{1}{2}ds = 0$.

§. 11. Sezt man demnach, daß zwo Berührungslinien eines Kegelschnittes MT, NT in einem Punkte T zusammen stossen, und daß die Axe der Applikaten der MN parallele liege, die Axe der Abscissen aber Tm, durch T gezogen sey, und den Kegelschnitt in m, die MN aber in F durchschneide; so wird S = TF, x = mF, wenn man m zum Anfangspunkte der Abscissen macht, und MF, FN sind die beiden Wurzeln der Gleichung (A) im vorhergeh. §. Da also $-csx - \frac{1}{2}ds$ das Produckt aus denselben ist (Einl. §. 7. so wird $-cSx - \frac{1}{2}dS = MF \times FN$. Nun aber muß in der Gleichung für den Kegelschnitt $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$ unter den gesezten Umständen e = o sein, weil m der Anfangspunkt der Abscissen ist, *fig. 6.*

und

und daher $y = 0$ wird, wenn $x = 0$ ist. (Einl. §. 4.) Folglich trift die Axe TF, wenn c nicht $= 0$ ist, den Kegelschnitt noch ausser m, in einem Punkte G an, dergestalt, daß $mG = -\frac{d}{c}$ wird; weil man, wenn man $y = 0$ sezt, eine Gleichung $cx^2 + dx = 0$ erhält, deren eine Wurzel $= 0$, die andre $= -\frac{d}{c}$ ist. (Einl. §. 7.) Also wird $MF \times FN = cS \times \frac{mG}{2} - cS \times mF$; und daher, weil $MF \times FG : MF \times FN = 1 : c$ ist (I. §. 10.) $TF \times FG - TF \times \frac{mG}{2} = mF \times FG$: und hieraus ferner, wenn man $mC = CG$ macht, $Tm \times FG = TF \times Cm$. Also ist $mT : Cm = TF : FG$.

§. 12. Folglich ist auch $mT + Cm : Cm = TF + FG - mT - Cm : FG - Cm$ * oder $CT : Cm = Cm \; CF$. „Wenn man also zwo Berührungslinien MT, NT, an einen Kegelschnitt „zieht, die in einem Punkte T zusammenstossen; „durch diesen Punkt aber eine gerade Linie legt, „die dem Kegelschnitte in zweenen Punkten m, „G, und der MN in F, begegnet, und man theilet dieselbe mG in C in zwo gleiche Hälften „$Cm = CG$; so ist Cm die mittlere Proportionalzahl zwischen CF und CT.

* Euclid. Elem. V. 17. 18.

§. 13. Es folgt ferner aus der Proportion $mT : Cm = TF : FG$ daß $2mT \times FG = mG \times TF$ sei. Nun aber ist $mG \times TF = (mF + FG) \times (TG - FG) = mF \times TG + mT \times FG = mF \times TG + \frac{1}{2} mG \times TF$. Folglich ist $2mF \times TG = mG \times TF$, und daher $mT \times FG = mF \times FG$; also $TG : Tm = FG : mF$. „Folglich wird, unter den Umständen „des vorhergehenden §, die Linie TG durch die „Punkte T, m, F, G, dergestalt getheilt, „daß sich die ganze (TG) zu dem einen äusersten Stücke, (Tm) wie das andre äuserste „Stücke (FG) zum mittleren (mF) verhält.„ Diese Theilung nennt man die harmonische; und es läßt sich aus diesem Satze alles was Hausen in Ansehung der harmonischen Theilung bloß vom Zirkel dargethan hat*, überhaupt von einem ieden Kegelschnitte erweisen.

§. 14. In dem andern Falle, da $c = 0$ ist, kann die Axe TF dem Kegelschnitte nur in dem einzigen Punkte m begegnen, man mag sie verlängern, wie man will, weil alsdenn $y^2 + axy + by + dx = 0$ ist, und folglich, für $y = 0$, x nur einen einzigen Werth hat, der $= 0$ ist.

In

* Element. Mathes. p. 203. seqq. Lemma II. & III. cum Corollar.

In dem Falle wird $\frac{1}{2}$ dS = MF ⋊ FN = d ⋊ mF; (I. §. 11.) folglich S = 2 ⋊ mF, und daher Tm = mF.

§. 15. Nehmen wir an, die Axe TM sei so gezogen, sie mag dem Kegelschnitte in einem oder in zweenen Punkten begegnen, daß MF = FN ist, so wird, weil in der Gleichung (A) §. 10. $\frac{1}{2}$ a S - $\frac{1}{2}$ b - $\frac{1}{2}$ ax die Summe der beiden Werthe von y ist, (Einl. §. 7) aS - b - a ⋊ mF = o. Da nun ausserdem auf eben die Art aus der Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 dx = o$ erhellet, daß - a ⋊ mF - b die Summe der beiden Werthe von y ist, welche zu der Abscisse mF gehören, so wird - a ⋊ mF - b = o, und daher, indem man diesen Ausdruck von dem vorhergehenden abzieht, aS = o; folglich a = o, und daher auch b = o. Also ist in dem Falle $y^2 + cx^2 + dx = o$ die Gleichung für den Kegelschnitt. Daraus aber ist klar, daß TF ein Durchmesser ist, zu dem alle Applikaten, als MF geordnet sind. (I. §. 6.)

§. 16. Wenn MF, FN zu einerlei Abscisse mF des Durchmessers mG geordnet sind, so müssen die beiden Berührungslinien bey M und N, wenn sie zusammenstossen, allezeit in einem Puncte T des Durchmessers zusammenstossen. Denn gesezt sie begegneten einander ausser dem Durchmesser, in t; so würde, weil

MF

MF = FN ist, die gerade Linie tF ein Durchmesser sein, von dessen zugeordneten Applikaten MF eine ist. (§. praec.) Folglich müste so wol mG, als tF, wenn mn, MN zwo parallele Chorden des Kegelschnittes sind, diese Chorden in zwo gleiche Hälften theilen; (l. §. 5.) welches unmöglich ist.

§. 17. Man ist ferner im Stande aus der Formel des 10. §. die Subnormal zu finden, wenn beide Axen AN, Aa senkrecht auf einander stehen. Es heißt nämlich derienige Theil BP von der Axe der Abscissen die Subnormal, welcher von einer, nach Gefallen angenommnen Applikate MP, und von der in M, auf die Berührungslinie MN, aufgerichteten senkrechten Linie MB, abgeschnitten wird. Denn weil man voraussetzt bei P sein rechte Winkel, so wird NP : PM = PM : PB, * oder, indem man überhaupt die zu y gehörige Subnormal N nennt, S: y = y: N, und daher $N = y^2 : S = (ay^2 + 2cxy + dy) : (2y + ax + b)$. *fig. 8.*

§. 18. Diese bisher erklärten Säze von den Berührungslinien scheinen zu unserm Zwecke hinreichend zu sein. Was aber die Durchmesser betrift, so wird überhaupt ein ieder Kegel-

* Elem. VI. 8. Euclid.

gelschnitt durch die Gleichung $y^2 - m^2 x^2 - nx - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$ ausgedrückt, wenn die Axe der Abscissen ein Durchmesser ist, zu dem die Applikaten geordnet sind. Denn es ist in dem Falle in der allgemeinen Gleichung (B) im 1 §. dieses Buchs, $ax + b = o$. (1. §. 6.) Folglich ist auch $b = o$; da x eine veränderliche Grösse ist, an deren Statt man auch o setzen kann. Also wird $ax = o$, und daher aus eben dem Grunde: daß x veränderlich ist, $a = o$. Dadurch erhält man die angeführte Gleichung.

Ist also $- \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o$, so wird $y^2 - m^2 x^2 - nx = o$, in welcher Gleichung $x = o$ ist, wenn $y = o$ wird; woraus erhellet, daß der Anfangspunct der Abscissen, in einer Spitze des Durchmessers liege. (Einl. §. 4. I §. 5).

§. 19. Diese leztere Gleichung entsteht aus der Gleichung des 6 §. in diesem Buche, wenn man daselbst $a = o$ sezt; und man sieht hieraus daß die Axe der Applikaten in dem Falle eine Berührungslinie sei. „Wenn man folglich „durch die Spitze eines Durchmessers eine gera„de Linie, den zu demselben geordneten Linien „parallel, zieht; so ist dieselbe eine Berührungs„linie.„

§. 20. Ferner ist es offenbar, daß der Coefficient n niemahls $= 0$ sein könne; weil alsdenn auch $p = 0$ würde, indem man den Anfangspuuct der Abscissen in die Spitze des Durchmessers sezt, und folglich $-n^2 : 4m^2 \mp p = 0$ macht. Dieses aber kan unmöglich geschehen. (II. §. 1.) Man nennt diese Grösse n den Parameter des Durchmessers, den man zur Axe der Abscissen macht; und es ist klar, daß unter den Linien vom zweiten Grade bloß die Kegelschnitte Parameters haben.

§. 21. Wenn man in dem Falle, da $-n^2 : 4m^2 \mp p = 0$ ist, $y = \frac{1}{2} n$ sezt, so erhält mann, wenn m^2 negativ ist, $x = -\frac{n}{2m^2} \mp \frac{n}{2m^2}\sqrt{(1+m^2)}$; oder, wenn m^2 positiv ist, $x = -n : 2m^2 \pm n \times \sqrt{(1-m^2)} : 2m^2$, oder endlich $x = \frac{1}{4} n$, wenn $m^2 = 0$ ist. Alle diese drei Fälle sind möglich, und geben in Ansehung der Würklichkeit der Werthe von x einen Unterschied. Denn im ersten und dritten Falle ist x beständig möglich; im zweiten aber nur, wenn 1 nicht $< m^2$, oder $n : m^2 < n$ ist. Nun aber ist $n : m^2$ der eine Werth von x, wenn $y = 0$ ist, und folglich die Grösse des Durchmessers. (Einl. §. 4. und I. §. 5.) Also sind in

iedem Durchmesser, der zwo Spitzen hat, und nicht kleiner als sein Parameter ist, zween Punkte, oder in iedem Durchmesser, der nur eine Spitze hat, ein Punkt, aus denen (oder: aus dem) die zu dem Durchmesser geordnete Applikate dem halben Parameter desselben gleich ist. Man nennt einen solchen Punkt einen Brennpunct des Kegelschnittes, wenn der Durchmesser, in dem er liegt, ein Hauptdurchmesser ist.

fig. 9. §. 22. Es sei F der Brennpunct eines Kegelschnittes A die Spitze des Hauptdurchmessers AF; FM eine aus F an den Kegelschnitt gezogne gerade Linie; so wird, wenn man AF, q nennt, $MF = q + x \surd (1 \dotplus m^2)$ sein, es mag m^2 positiv oder negativ oder $= 0$ angenommen werden.

Denn man erhält, wenn man MP zum Hauptdurchmesser ordnet, weil bei P ein rechter Winkel ist. (I. §. 8) $FM^2 = y^2 + x^2 - 2qx + q^2$. Nun aber ist, wenn man der Kürze wegen $p = n : 2m^2$ sezt, $y^2 = m^2 x^2 \dotplus 2m^2 px$, und q, oder die Wurzel der Gleichung $\frac{1}{4} n^2 = m^2 x^2 + nx$, (§. praec.), $= - p + p \surd (1 + m^2)$ im Falle da m^2 nicht $= 0$ ist. Folglich wird alsdenn $FM^2 = m^2 x^2 + 2m^2 px + q^2 + 2px - 2px \surd (1 + m^2)$

$(1+m^2)+x^2 = m^2x^2 + x^2 + q^2 + 2qx\surd(1+m^2)$; also $FM = q + x\surd(1+m^2)$. Ist aber $m^2 = 0$, so wird $q = \frac{1}{2}pm^2$ und $y^2 = 2m^2px = 4qx$; folglich $FM^2 = 4qx + x^2 - 2qx + q^2 = x^2 + 2qx + q^2$; und daher $FM = q + x$, oder $= q + x\surd(1+m^2)$.

§. 23. Wenn man aus M eine auf die Berührungslinie MT senkrechte Linie MR zieht, die der Axe in R begegnet, so wird die Subnormal $PR = -m^2(x+p)$. Denn sie ist überhaupt nach II. §. 17. $= (ay^2 + (\frac{1}{2}a^2 - 2m^2)xy + (\frac{1}{2}ab - n)y) : (2y + ax + b)$. Da nun $a = 0$ und $b = 0$ ist, weil AR ein Durchmesser ist; (II. §. 18) so wird $PR = -m^2x - \frac{1}{2}n = -m^2(x+p)$.

Also ist $MR^2 = y^2 + m^4x^2 + m^4p^2 + 2m^4px = y^2 + m^2y^2 + m^4p^2$. Da nun, wenn man RL senkrecht auf MF zieht, $FR \times MP = MF \times RL$ ist, so wird $R\text{-} = ((x - q + m^2x + m^2p)y) : (q + x\surd(1+m^2)) = y((q\surd(1+m^2) + x\surd(1+m^2)^2) : (q + x\surd(1+m^2)) = y\surd(1+m^2)$, und daher $RL^2 = y^2 + m^2y^2$. Weil nun $ML^2 = MR^2 - RL^2$ ist, so wird $ML^2 = m^4p^2$ und daher $ML =$

$m^2 p = \frac{1}{2} n$. „Wenn man also aus dem „Brennpunkte eines Kegelschnittes F nach Gefallen eine gerade Linie zieht, die demselben in „M begegnet: durch M eine Berührungslinie „MT, und dieser die MR senkrecht sezt, welche „die Axe in R antrift; so ist der Theil ML von „MF der von einer aus R auf MF gelaßnen „senkrechten Linie RL abgeschnitten wird, dem „halben Parameter der Axe gleich.„

Auf eben die Art sieht man, weil $MF - AF = x\sqrt{(1 + m^2)}$ ist, daß $MF - AF : RL = AP : PM$ sei.

§. 24. Läßt man also die FB auf dem Brennpunkte F auf die Berührungslinie MT senkrecht herab, so sind MR, BF gleichlauffende Linien, und die Dreiecke MLR, MBF einander ähnlich. Folglich wird $MR : ML = MF : FB$ und daher $FB = n \times FM : 2MR$.

§. 25. Nach diesen Untersuchungen scheint es nöthig zu sein, ehe wir dieses Buch beschliessen, noch vorher einige Betrachtungen über die Krümmung der Kegelschnitte anzustellen, um selbige mit der Krümmung eines Zirkels zu vergleichen, dessen Eigenschaften wir aus den Anfangsgründen des Euklides als bekannt voraussezen können.

fig. 10. Zu dem Ende nehmen wir an die Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ drücke die Natur eines Kreises

aus

aus dessen Halbmesser $= r$ ist, wenn die Axe der Abscissen ein Durchmesser desselben, und die Axe der Applikaten eine Berührungslinie ist; welches zum Theil aus dem 35 Satz des III Buchs des Euklid erhellet, zum Theil aber auch in der Folge bewiesen werden wird. III. §. 14. Es sein also Ab, AF diese beiden Axen, welche senkrecht auf einander stehen *, und APd ein Kegelschnitt der gleichfalls in dem Punkte A von der AF berührt wird, und dessen Natur durch die Gleichung $y^2 + axy + (\frac{1}{4}a^2 - m^2)$ $x^2 - nx = 0$ ausgedrückt wird, wenn man ihn auf eben dieselben Axen AF, Ab bezieht. (II. §. 6.) Sezt man also das y der einen Gleichung dem y in der andern gleich, so erhält man die Gleichung $2rx - x^2 + ax\sqrt{(2rx - x^2)} + \frac{1}{4}a^2x^2 - m^2x^2 - nx = 0$ oder (A) $x^4 + ((2n - 4r - a^2r - 4rm^2 + 2m^2n - \frac{1}{2}a^2n)x^3) : (1 + a^2 + m^4 + \frac{1}{16}a^4 + 2m^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2m^2) + ((4r^2 + n^2 - 4rn)x^2) : (1 + a^2 + m^4 + \frac{1}{16}a^4 + 2m^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2m^2) = 0$ deren Wurzeln diejenigen Abscissen sind zu welchen Applikaten gehören, die dem Zirkel mit dem Kegelschnitte gemein sind. So viele Wurzeln also diese Glei-

* Euclid. III. 28.

Gleichung hat, in so vielen Punkten kan der Zirkel den Kegelschnitt durchschneiden. Folglich durchschneidet ein ieder Zirkel den Kegelschnitt in vier Punkten, zweimahl nämlich im Punkte A, weil zwo Wurzeln der Gleichung (A) = o sind, und noch in zweenen andern Punkten, wenn die übrigen Wurzeln würklich sind, oder nirgend weiter, wenn dieselben unmöglich sind. Nehmen wir nun an, daß $4r^2 + n^2 - 4rn = 0$ oder $r = \frac{1}{2} n$ sei, so wird noch eine Wurzel der Gleichung (A) = o, und der Kreis Ab trift den Kegelschnitt im Punkte A dreimahl, und noch ausser A einmahl, an. Sein Halbmesser AC oder r ist = $\frac{1}{2}$ n, woraus erhellet, daß bei einem Kegelschnitte, da n allemahl eine würkliche Grösse ist, (II. §. 20) ein solcher Kreis allezeit möglich und der einzige in seiner Art ist. Man nennt ihn den Zirkel der Krümmung im Punkte A (circulus curuaturae, circulus osculator) und AC den Halbmesser der Krümmung (radius curuaturae, radius osculi, radius Euolutae).

§. 26. Die Ursache dieser Benennung liegt darinn, daß kein andrer Zirkel zwischen dem Krümmungskreise und dem Kegelschnitte gezogen werden kan, und folglich kein Zirkel ist, dessen Krümmung der Krümmung des Kegelschnittes näher kommt, als dieser,

Denn

Denn der Krümmungskreis AB hat in A mit dem Kegelschnitte drei gemeinschaftliche Applikaten, deren jede = o ist. Nun würde er daselbst bloß von der Linie AF berührt werden, wenn bloß zwo Applikaten in A zu nichts würden; (II. §. 6) und den Kegelschnitt bloß durchschneiden, wenn bloß eine Applikate daselbst verschwände. (Einl. §. 4.) Da also beides zugleich geschieht, so muß der Zirkel der Krümmung in A von der AF berührt werden, und den Kegelschnitt durchschneiden. Ausserdem trift er ihn noch in einem Punkte g an. Wäre also AG ein zwischen dem Krümmungskreise und dem Kegelschnitte gezogner Kreis, so müste derselbe gleichfalls in A von der AF berührt werden, und den Kegelschnitt durchschneiden. Folglich würden in A gleichfalls drei seiner Applikaten zusammenfallen die er mit dem Kegelschnitte gemein hat; und also begegnete derselbe Kreis dem Kegelschnitte ausserdem nur noch in einem einzigen Punkte G. Fiele g in A, so müste auch G in A fallen. In beiden Fällen also, da g auser A liegt, oder in A fällt, müssen wenigstens drei Wurzeln der Gleichung (A) = o sein, wenn AG der Kreis ist dessen Natur durch die Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ ausgedrückt wird. Dieses aber ist unmöglich, wenn nicht $4r^2 + n^2 - 4rn = o$,

oder

oder $r = \frac{1}{2} n$ ist, d. i. wenn AG nicht der Krümmungskreis selbst ist.

Man sieht aus dieser Betrachtung nicht nur, daß ein ieder Kegelschnitt eine beständig krumme Linie sei, sondern auch wie man seine Krümmung an einem gegebnen Punkte messen könne. Denn da unter allen möglichen Kreisen der Krümmungskreis mit dem Kegelschnitte am genausten übereinkommt, so kann man sagen, daß dieser unter allen möglichen Kreisen derienige sei, dessen Krümmung der Kegelschnitt in einem gewissen Punkte hat. Es erhellet gleichfalls, daß der Krümmungskreis in A viel genauer mit dem Kegelschnitte verbunden sei, als die Berührungslinie FA. Denn der Winkel den die FA mit dem Kegelschnitte macht, kan durch unzählige dazwischen gehende Kreise getheilt werden. Dieses aber ist bei dem Winkel zwischen dem Krümmungskreise und dem Kegelschnitte unmöglich.

§. 27. Soll man für den gegebnen Punkt M eines Kegelschnittes den Halmesser der Krümmung AC finden? so ziehe man an M eine Berührungslinie AF (II. §. 9) und Ab senkrecht auf sie. Man verwandle die gegebne Gleichung für den Kegelschnitt dergestalt, daß Ab die Axe der Abscissen, AF die Axe der Applikaten wird, (Einl. §. 6.) in welchem Falle sie

die

die Form $y^2 + axy + (\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 - nx = 0$ erhält. Man mache $AC = \frac{1}{2}n$, so ist diese Linie der verlangte Halbmesser.

§. 28. Wenn man in den beiden Gleichungen für den Kreis und den Kegelschnitt pz statt x, und $u + qz$ statt y sezt, so verändert man weiter nichts als die Axe der Abscissen, welche nunmehr AB ist, die der Pm in M und dem Krümmungskreise in B begegnet; und von den Grössen p, q, bedeutet q den sin. BAb, und p den sin. AMμ, oder den cos. BAb weil bei μ ein rechter Winkel ist, woraus erhellet daß $p^2 + q^2 = 1$ sei, weil wir den sin. tot $= 1$ annehmen (Einl. §. 6.). Man erhält durch diese Voraussetzungen I. $u^2 + 2quz + q^2z^2 = 2rpz - p^2z^2$ für den Kreis, und II. $u^2 + 2quz + q^2z^2 + apuz + apqz^2 + \frac{1}{4}a^2p^2z^2 - m^2p^2z^2 - npz = 0$ für den Kegelschnitt. Da also wenn $u = 0$ ist, aus der erstern Gleichung $z = \frac{2rp}{p^2 + {}^2q} = np$, und aus der andern $z = np : (q^2 + apq + \frac{1}{4}a^2 - m^2)$ wird, so muß $AB = np$ sein, und in dem Falle da $q^2 + apq + \frac{1}{4}a^2 - m^2$ nicht $= 0$ ist, die Axe AB dem Kegelschnitte in D begegnen, dergestalt daß $AD = np : (q^2 + apq + \frac{1}{4}a^2 - m^2)$ ist. (Einl. §.4.) Folglich ist $AB : AD =$

$q^2 +$

$q^2 + apq + \frac{1}{4} a^2 - m^2 : 1$. Nun aber ist auch $PM \times Mm = (q^2 + apq + \frac{1}{4} a^2 - m^2) \times AM \times DM$. (I. §. 10) folglich wird $AB : AD = PM \times Mm : AM \times DM$.

Ist aber $q^2 + apq + \frac{1}{4} a^2 - m^2 = 0$ so trift die Sehne AB den Kegelschnitt ausser A in keinem Punkte weiter an, man mag sie verlängern wie man will. In dem Falle aber wird $PM \times Mm = np \times AM$. (I. §. 11.) Da nun $np = AB$ ist, so erhält man $AM : PM = Mm : AB$.

§. 29. Wenn die Sehne der Krümmung, als AH, ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, so wird $2q + ap = 0$, $u^2 + q^2 z^2 + apqz^2 + \frac{1}{4} a^2 p^2 z^2 - m^2 p^2 z^2 - npz = 0$ (I. §. 6) und np ist der Parameter desselben Durchmessers. (II. §. 20) Nun aber ist aus dem vorhergehenden §. $AH = np$. Also ist in dem Falle die Sehne der Krümmung dem Parameter des Durchmessers gleich, welchen sie zugleich vorstellt.

§. 30. Wenn FE eine der Sehne AB gleichlauffende Linie ist, welche den Kegelschnitt in E berührt, und der AF in F begegnet, so ist $AF^2 : FE^2 = PM \times Mm : AM \times MD$. (II. §. 8.) $= AB : AD$. (II. §. 28) Ist also $AF^2 = FE^2$, so wird $AD = AB$ und der

Krüm-

Krümmungskreis durchschneidet den Kegelschnitt in D. Wenn man folglich aus einem Punkte T des Hauptdurchmessers TE eine Berührungslinie MT zieht, MP zu AE ordnet, und MR unter einem Winkel PMR, der = TMP ist, zieht, so muß diese Linie dem Kegelschnitte in dem Punkte R begegnen, durch welchen der Krümmungskreis bei M geht. Denn wenn man MP verlängert, biß es dem Kegelschnitte in m begegnet, so ist MP = Pm, und Tm eine Berührungslinie bei m. (II. §. 16.) Folglich wird, da über dieses bei P rechte Winkel sind, TM = Tm, und TM = TMm = mMR, folglich MR und Tm gleichlauffend. *fig. 11.*

§. 31. Diese Sehne MR aber selbst kan auf folgende Art durch Rechnung gefunden werden. Wenn S der Punkt ist, in dem der Hauptdurchmesser AE die MR durchschneidet, und man annimmt, daß derselbe dem Kegelschnitte in zween Punkten A und E begegnet, so wird TA ⋊ TE: AS ⋊ SE = Tm^2 : MS ⋊ SR (I. §. 10.) = TM: SR. Denn es ist Tm = TM, und MS = TM, da die rechtwinklichten Dreiecke TMP, MPS, wegen der gleichen Winkel TMm, und mMS einander gleich sind. Nun aber drückt die Gleichung $y^2 \pm m^2 x^2 - nx = 0$ den Kegelschnitt aus, wenn man AE als die Axe der Abscissen, und eine durch A der Mm gleichlauffende Linie als Axe der Applikaten

ten annimmt. (II. §. 18.) Folglich wird AE, oder x, indem man $y = o$ setzt $= \pm \frac{n}{m^2}$. (Einl. §. 4.) Nennt man daher $n : m^2$, $2p$; TA, a; AS, b, so wird $a (a \pm 2p) : b (\pm 2p - b) = TM : SR$. Nun aber ist $b = a + 2x$, da TP = PS ist. Also wird $a^2 \pm 2ap : \pm 2ap - a^2 - 2ax \pm 4px - 2ax - 4x^2 = TM : SR$, und $a^2 \pm 2ap : \pm 4ap - 4ax \pm 4px - 4x^2 = TM : MR$ *. Ferner haben wir die Proportion (II. §. 13.) $a \pm 2p : a = \pm 2p - x : x$, aus der wir erhalten $\pm p = ax : (a - x)$. Folglich ist $a^2 + 2a^2 x : (a-x) : 4a^2 x : (a-x) - 4ax + 4a^2 x : (a-x) - 4x^2 = TM : MR = a^3 + a^2 x : 4ax^2 + 4x^3$, und daher $MR = \frac{4ax^2 + 4x^3}{a^3 + a^2 x} \times TM = \frac{4x^2}{a^2} \times TM$

Wir haben bisher angenommen die Axe AE begegne dem Kegelschnitte, noch ausser A, in E. Wenn aber nur der eine Punkt A da ist, so wird $TA : AS = TM : SR$, (I. §. 11.) und daher $SR = (a + 2x) \times TM : a$. Nun aber ist in eben dem Falle $a = x$. (II. §. 14.) Folglich wird auch hier $MR = SR \times TM = \frac{4x^2}{a^2} \times TM$.

„Also

* Element. V. 18.

„Also verhält sich überhaupt das Quadrat „von TA zum Quadrate von 2AP, wie die „Berührungslinie TM zur Sehne der Krüm„mung MR.„

§. 32. Wenn MB auf MT senkrecht steht, und die Axe in B durchschneidet, so wird, da $ax : (a - x) = \pm p$, und $p = n : 2m^2$ ist, $a = \mp px : (x \mp p) = nx : (\mp 2m^2 x + n)$ und daher $TB = a + x \mp m^2 x + \frac{n}{2}$ (weil die Subnormal $PB = \mp m^2 x + \frac{n}{2}$ ist. (II. §. 23) $= (2nx \mp 2m^2 x^2 + 2m^4 x^2 \mp 2nm^2 x + \frac{n^2}{2}) : (\mp 2m^2 x + n)$ Nun aber ist $2MB^2 = 2y^2 + 2PB^2 = \mp 2m^2 x^2 + 2nx + 2m^4 x^2 \mp 2nm^2 x + \frac{n}{2}$ folglich wird $2MB = TB \times (\mp 2m^2 x + n) = TB \times nx : a$.

Zieht man also durch R eine der MT gleichlauffende Linie, welche der Axe in ϱ, und der MB in r begegnet, so ist $RS = R\varrho$, weil $MT = MS$ ist, und $Br : r\varrho = MB : MT$, daher $Br = MB \times r\varrho : MT$, und $Mr = (MB \times MT + MB (rR + RS)) : MT$, folglich $Mr \times MT - MB \times MR = MB \times \surd (MR^2 - Mr^2)$. Daher erhält man $Mr = 2MB \times MT \times MR :$

$TB^2 = 8 MB \times MT^2 \times x^2 : a^2 \times TB^2$, und also $\sqrt{(2MB \times Mr)} = 4MB \times MT \times x : a \times TB$. Folglich ist $2MB \sqrt{(2MB \times Mr)} : n = 4MT \times x \times 2MB^2 : an \times TB = 4MT \times x^2 : a^2 = MR$.

Man theile MR in zwo gleiche Hälften $Mp = pR$, und ziehe pC durch Mr, senkrecht auf MR, so ist MC der Halbmesser der Krümmung *, und $MC : Mp = MR : Mr$, und daher $MC = MR^2 : 2Mr = 4MB^3 : n^2$.

§. 33. Vermittelst dieser Formel ist man im Stande auf eine leichte Art den Halbmesser der Krümmung MC an einem gegebenen Punkte M des Kegelschnittes geometrisch zu finden.

Denn es sei AE der Hauptdurchmesser in dem der Brennpunkt F liegt. Man ziehe MF, und MB auf MT senkrecht, wie auch Bf der MT gleichlauffend, welche die MF in f antrift. Man durchschneide MB mit einer aus f gezognen, auf Mf senkrechten geraden Linie in C, so ist MC der gesuchte Halbmesser.

Denn es ist, wenn FO auf MT senkrecht steht, $FO : FM = BM : fM = fM : MC$ und daher $FO^2 : MF^2 = BM : MC$, oder, da $FO = n \times FM : 2MB$ ist, (II. §. 24.) $n^2 :$

4MB²

* Elem. III. 3.

$4MB^2 = MB : MC$; und daher $MC = 4MB^3 : n^2$.

§. 34. Wenn der Krümmungskreis dem Kegelschnitte nur in dem Berührungspunkte begegnet, so wird $MR = o$, und daher auch $MT = o$, weil $MR = 4MT \times x^2 : a^2$ ist. Folglich ist alsdenn auch $MO^2 = o$, und daher $FO^2 = FM^2$, und $n = 2MB$. (II. §. 23.) daher wird $MC = \frac{1}{2}n$. Nun aber ist es offenbar, daß in den Spitzen des Hauptdurchmessers, als in A, $FO = FM$ sei. „Also „ist der Halbmesser der Krümmung in diesen „Spitzen dem halben Parameter des Haupt„durchmessers gleich, und der Krümmungs„kreis durchschneidet den Kegelschnitt weiter „gar nicht.„

§. 35. Es sei $M\mu$ die Sehne der Krümmung, welche durch den Brennpunkt F geht, und μQ auf MQ senkrecht; so ist aus der Natur des Kreises $M\mu^2 = 2MC \times MQ$*. Zieht man nun BL, Ql auf $M\mu$ senkrecht, so wird $M\mu : MQ = MQ : Ml = MB : ML = MB : \frac{1}{2}n$. (II. §. 23.) Folglich ist $M\mu^2 : MQ^2$ oder $2MC : MQ = MB^2 : \frac{1}{4}n^2$, und daher $MQ = n^2 \times MC : 2MB^2 = 2MB$; also

* Element. III. 31, und VI. 8.

also MB = BQ, ML = Ll. „ Wenn man „ also aus dem gegebnen Punkte M, durch „ denn Brennpunkt F eine gerade Linie zieht; „ den Theil von ihr Ml dem Parameter der „ Axe, in der F liegt, gleich macht; lQ senk- „ recht auf Mμ, und Qμ senkrecht auf MQ „ sezt, so ist Mμ die Sehne der Krüm- „ mung. „

Das dritte Buch
von den verschiednen Arten der Kegelschnitte.

§. 1. Man kann einen jeden Kegelschnitt durch die Gleichung $y^2 - m^2 x^2 - nx = o$ ausdrücken, in welchem Falle die Axe der Abscissen ein Durchmesser ist, zu dem die Applikaten geordnet sind, und der Anfangspunkt der Abscissen in einer Spitze desselben Durchmessers liegt. (II. §. 18.) Da diese Gleichung überaus einfach ist, wird es leicht sein, die verschiednen Arten der Kegelschnitte aus ihr zu bestimmen.

§. 2. Erstlich ist es aus dem vorhergehenden Buche bekannt, daß der Parameter n niemahls ein Nichts sein könne; (II. §. 20.) und es folgt hieraus daß er allemahl entweder eine positive oder negative Grösse sein müsse. Allein, man nehme das erste oder das lezte an, es wird dadurch bloß in der Lage des Kegelschnittes, nicht aber in seiner eigentlichen Gestalt, in seinem Zuge, einige Veränderung vorgehen. Denn die Gleichung $y^2 - m^2 x^2 + nx = o$ verwandelt sich in $y^2 - m^2 x^2 - nx = o$ bloß, indem man $- x$, statt $+ x$ sezt. Folglich sind in beiden Fällen die Kegelschnitte unter einander vollkommen einerlei, ausser daß der eine an

diese, der andre, an iene Seite des Anfangs-punktes der Abscissen fällt.

§. 3. Es bleibt uns also nichts als der Coiffi-cient m^2 übrig, welcher entweder ein Nichts, oder eine positive, oder negative Grösse ist. Diese drei verschiednen Fälle geben, wie wir sogleich sehen werden, drei verschiedne Linien.

§. 4. Wenn $m = 0$ ist, so wird der Kegel-schnitt durch die Gleichung $y^2 = nx$ ausge-drückt, in welcher beide Werthe von y würklich sind, man mag dem x einen so grossen positiven Werth geben, als man will: aber eingebildet
fig. 9. werden, so ofte x negativ ist. Also geht der Kegelschnitt in dem Falle mit zween Armen AD, AG über und unter dem Durchmesser AE, nach einerlei Gegend, ohne Ende fort. Man nennt ihn eine **Parabel**.

§. 5. Der andre Fall, da die beiden Quadrate x^2 und y^2 in der Gleichung sind, und einer-lei Zeichen haben, giebt den Kegelschnitt, wel-cher eine **Ellipse** heist; und es ist also $y^2 + m^2 x^2 - nx = 0$ die Gleichung für eine Ellipse, aus der man erhält $y = \pm \surd(-m^2 x^2 + nx)$. Folglich sind beide y für ieden negativen Werth von x eigebildet; hingegen würklich, so lange x positiv, und kleiner als $n : m^2$ ist; sie verschwinden, wenn $x = n : m^2$ wird; und werden wiederum eingebildete Grössen, wenn

x 7n:

$x > n : m^2$ ist. Also geht die Ellipse mit zween Armen mND, mMB, aus dem Anfangspunkte der Absciſſen m, über und unter dem Durchmesser nach einerlei Gegend fort, und vereinigt dieselben wiederum in einem Punkte G, dergestalt daß der ganze Durchmesser mG (I. § 5.) $= n : m^2$ ist. *fig.* 6.

§ 6. Der lezte Fall endlich, da $y^2 - m^2 x^2 - nx = 0$ die Gleichung für den Kegelschnitt ist, giebt diejenige Linie, welche man Hyperbel nennt. Es ist in dem Falle $y = \pm \sqrt{(m^2 x^2 + nx)}$, woraus erhellet, daß y für jeden positiven Werth von x würklich sei, hingegen eingebildet werde, wenn x negativ, und kleiner als $- n : m^2$ ist; verschwinde, wenn $x = - n : m^2$ ist; und endlich wiederum beständig würklich bleibe, wenn x negative Werthe erhält, die $> - n : m^2$ sind. Also geht in dem Falle der Kegelschnitt DBE aus dem Anfangspunkte der Absciſſen B, über und unter dem Durchmesser BH, nach der Seite der positiven Absciſſen ohne Ende fort; fängt wiederum in einem andern Punkte A desselben Durchmessers an, und zieht sich auf eben die Art durch den Raum, der an der entgegengesezten Seite des Punktes B liegt. Eigentlich heißt ein jeder der beiden Theile dieser Linie, besonders, als DBE oder FAG, eine Hyperbel; *fig.* 17.

bel; beide aber zusammen werden entgegengesezte Hyperbeln genannt.

§. 7. Nach dieser Untersuchung sind wir im Stande deutlich darzuthun, daß alle diese verschiednen Linien, die Parabel, die Ellipse, und Hyperbel, aus dem Schnitte einer Kegeloberfläche entstehen, und folglich mit dem grösten Rechte Kegelschnitte genannt werden. Denn obgleich man überhaupt einigermassen sieht, daß alle durch den Schnitt eines Kegels hervorgebrachte Linien, Linien vom zweiten Grade sind, weil ihnen, da sie gänzlich in eine Kegeloberfläche fallen, eine iede gerade Linie in keinem, oder in einem, oder höchstens in zweenen Punkten begegnen muß, welches eine Haupteigenschaft der Linien vom zweiten Grade ist: (I. §. 4.) so scheint es doch aus vielen Ursachen, nöthig zu sei, die Wahrheit dieses Satzes durch Untersuchung der verschiednen Arten, nach welchen eine Kegeloberfläche geschnitten werden kan, hier in ein grösseres Licht zu setzen.

fig. 12. §. 8. Es entsteht aber eine solche Oberfläche, indem sich eine unbestimmt grosse gerade Linie OD, in der man zween Punkte A und D annimmt, um den einen A dergestalt bewegt, daß, indem derselbe unbeweglich bleibt, der andre D den Umfang eines Kreisses BD beschreibt. Der Punkt A heißt die Spitze; der Kreis BD die

Grund-

Grundfläche; eine iede, aus der Spitze A in der Oberfläche gezogne gerade Linie, eine Seite; und die gerade Linie AC die Axe des Kegels, welche durch den Mittelpunkt C der Grundfläche, und die Spitze A geht.

§. 9. Wenn man also eine Oberfläche von der Art mit einer ebnen Fläche durchschneidet, die durch die Spitze des Kegels A geht, so muß selbige auch die Grundfläche in einer geraden Linie BD durchkreuzen, welche folglich eine Sehne derselben Grundfläche ist. Daher fallen zwo Seiten des Kegels AB, AD in die schneidende Ebne, und machen den Kegelschnitt aus. Denn überhaupt ist ein Kegelschnitt eigentlich eine iede Linie die in der Kegeloberfläche, aus deren Durchschneidung mit einer andern Fläche, entsteht. Theilt man also BD in E in zwo gleiche Hälften, und nimmt AE als die Axe, A, als den Anfangspunkt, der Abscissen; die Axe der Applikaten aber der BD gleichlauffend, an, und nennt AE, a; BE, am; so wird für iede Abscisse AC, zu der die beiden Applikaten be, ed gehören, da AC : eb = AE : EB und Ae : ed = AE : ED = AE : EB ist, $y = mx$, und $y^2 - m^2 x^2 = 0$ die Gleichung für den Kegelschnitt, welcher also eine Linie vom zweiten Grade ist, die AE zum Durchmesser hat.

§. 10. *Geht die schneidende Ebene nicht durch die Spitze A, so ist sie der Grundfläche entweder gleichlauffend oder nicht gleichlauffend.

Im ersten Falle, sei c der Punkt in dem die Axe des Kegels AC, selbige Ebne antrift. Wenn man nach Belieben zwo gerade Linien cb, cd zieht, und durch Acb, Acd Ebnen legt; so müssen dieselben die Grundfläche in den Linien CB, CD durchkreuzen, welche den Linien cb, cd gleichlauffend**, und Halbmesser der Grundfläche sind, da C der Mittelpunkt derselben ist. Folglich sind die Linien AB, AD Seiten des Kegels, und es liegen die Punkte d, b, in denen bc, AB, und cd, AD einander durchschneiden, in dem Kegelschnitte. Da also über dieses bc : Ac = BC : AC = CD : AC = cd : Ac, folglich cb = cd ist; so folgt: daß alle aus c in der schneidenden Ebne gezogne gerade Linien, den Kegelschnitt in einem Punkte antreffen, dergestalt, daß der zwischen c und dem Kegelschnitte liegende Theil von ihnen durchgehends einerlei Grösse hat; und folglich: daß der Kegelschnitt ein Kreis sei, dessen Mittelpunkt c ist.

Im

* Dieser § ist gröstentheils aus Herrn Segners analyt. finit. §. 701. genommen.

** Elem. XI. 16.

Im andern Falle durchschneide man nach Gefallen die schneidende Fläche mit einer, der Grundfläche gleichlauffenden Ebne HEIG in EG, so wird der Kegelschnitt HEIG ein Kreis sein, dessen Sehne EG, und der Mittelpunkt c in der Axe AC ist, wie wir eben gesehen haben. Man theile also EG in F in zwo gleiche Hälften, und setze durch die Axe AC, und den Punkt F eine Ebne, die der schneidenden Fläche in B, und dem Kreise HEIG in den Punkten H, I begegnet; so wird HI ein Durchmesser desselben Kreises sein, der auf EG senkrecht steht*, und folglich $FG^2 = HF \times FI$**. Nun ist die Linie BF der Seite AH entweder gleichlauffend, oder nicht. Im leztern Falle begegnet sie ihr in K entweder unter oder über der Spitze A. In allen dreien Fällen ziehe man BD auf AH der HI gleichlauffend. *fig.* 13. 14. 15.

Sind nun auch AH, BF gleichlauffend, so wird $AD : DB = BF : FI$, und folglich $FI = DB \times BF : AD$. Also wird $FG^2 = HF \times DB \times BF : AD = DB^2 \times BF : AD = n \times BF$, indem man $DB^2 : AD$ als eine beständige Grösse, die unverändert bleibt, es mag die Ebne HEGI so weit, als man will, vom Punkte B entfernt sein, n nennt. Nimmt man also BF als die Axe, B als den Anfangspunkt der *fig.* 13

Ab-

* Elem. III. 3. ** Elem. III. 35.

Abscissen, und die Axe der Applikaten der FG gleichlauffend an; so ist überhaupt $y^2 = nx$, und folglich der Kegelschnitt eine Parabel, deren Durchmesser BF ist. (III. §. 4.)

fig. 14. Lauffen hingegen die Linien AH, BF in K zusammen, so ziehe man KL auf AI der HI gleichlauffend. Man erhält dadurch $BF : BK = FI : KL$, folglich $FI = KL \times BF : BK$; und $HF : DB = KF : KB$, folglich $HF = (DB \times (BK \pm KF)) : BK$. Nennt man also die beständigen Grössen KL, a. BK, $n : m^2$; DB, c und nimmt DK zur Axe, B zum Anfangspunkte der Abscissen; die Axe aber der Applikaten der EG gleichlauffend an; so wird $FI = am^2 x : n$, $HF = (c(n : m^2 \pm x)) : n : m^2 = c \pm m^2 cx : n$. Folglich wird aus der Gleichung $FG^2 = HF \times FI$, $y^2 = acm^2 x : n \pm acm^4 x^2 : n^2$, oder, indem man $ac = n^2 : m^2$ sezt, $y^2 \mp m^2 x^2 - nx = o$, welche Gleichung die Ellipse und Hyperbeln unter sich begreift. (III. §. 5. 6.)

§. 11. Es ist nun noch übrig, daß wir von Gleichungen welche die Natur der verschiednen Kegelschnitte überhaupt ausdrücken, mit wenigem reden.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung für einen Kegelschnitt $y^2 + axy + by +$

$(\frac{1}{4}a^2$-

$(\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0$, $x = z : r$, und $y = u - az : 2r - \frac{1}{2}b$ sezt, so erhält man die Gleichung $u^2 - m^2z^2 : r^2 - nz : r - n^2 : 4m^2 \mp p = 0$, und die Axe der Abscissen wird ein Durchmesser zu dem die Applikaten geordnet sind, und dessen Parameter $\frac{n}{r}$ ist. (II. §. 20.)

§. 12. Ist also $m^2 = 0$, so erhalten wir für die Parabel $y^2 + axy + by + \frac{1}{4}a^2x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - n^2 : 4m^2 \mp p = 0$ und $u^2 - nz : r - n^2 : 4m^2 \mp p = 0$. Obgleich $n^2 : 4m^2$ in unserm Falle eine unbestimmte Grösse ist, so muß doch $\frac{n^2}{4m^2} \mp p$ eine gänzlich bestimmte Grösse sein. Denn wäre sie es nicht, so würde u, da $u = \pm \surd(nz : r + n^2 : 4m^2 \pm p)$ ist, für keinen einzigen bestimmten Werth von z, gleichfalls einen bestimmten Werth haben; oder es würde zu keiner Abscisse eine Applikate gehören, indem iede würkliche Abscisse und Applikate vollkommen bestimmte Grössen sind. Wir müssen also $n^2 : 4m^2 \mp p = q$ annehmen, so daß q eine bestimmte Grösse, oder auch eine Null

an-

anzeigt und erhalten dadurch $y^2 + axy + by + \frac{1}{4}a^2 x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 + q = 0$, und $u^2 - nz : r + q = 0$.

Wenn m^2 nicht $= 0$ ist, so wird $y^2 + axy + by + (\frac{1}{4}a^2 \pm m^2)x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 \pm \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0$. Die allgemeine Gleichung für die Ellipse und Hyperbeln; und $u^2 \pm m^2 z^2 : r^2 - nz : r + n^2 : 4m^2 \mp p = 0$ folglich $\pm nr : m^2$ der Durchmesser, dessen Parameter $n : r$ ist. (III. §. 5. 6)

§. 13. Hiedurch ist man im Stande für eine iede gegebne Gleichung vom zweiten Grade, die Linie anzuzeigen, deren Natur sie ausdrückt.

Denn sie läst sich entweder in zween Theiler auflösen, in denen beiden beide veränderliche Grössen rationell sind, oder nicht. Im ersten Falle hat sie die Form $y^2 + axy + by + (\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - n^2 : 4m^2 = 0$ und drückt das System zwoer geraden Linien aus. (II. §. 1.) Im andern Falle, da sie einen Kegelschnitt bezeichnet, hat sie die Form $y^2 + axy + by + (\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - n^2 : 4m^2 \pm p = 0$, so daß p niemahls $= 0$ ist, und verwandelt sich, indem man bloß die Axe der Abscissen so ver-

verändert, daß sie ein Durchmesser wird, die Axe der Applikaten aber unverändert läßt, in $u^2 - m^2 z^2 : r^2 - nz : r - n^2 : 4m^2 \mp p = o$, da denn $n : r$ der Parameter desselben Durchmessers wird.

Nun ist entweder $m^2 = o$, und alsdenn ist der Kegelschnitt eine Parabel; oder es ist m^2 positiv, in welchem Falle der Kegelschnitt eine Ellipse, und $nr : m^2$ die Grösse des Durchmessers wird, dessen Parameter $n : r$ ist; oder es ist endlich m^2 negativ, und alsdenn ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, deren Durchmesser $-nr : m^2$ ist

§. 14. Wenn $m = r$ ist, so wird bei der Ellipse $u^2 = \frac{n}{m} z - z^2$, indem man $- n^2 : 4m^2 \pm p = o$, oder den Anfangspunkt der Abscissen in die Spitze des Durchmessers sezt; und der Durchmesser $n : m$ ist seinem Parameter gleich. Nimmt man also an daß derselbe eine Axe sei, oder daß die Applikaten u unter einem rechten Winkel zu den Abscissen geordnet sind; und sezt $z = \omega + n : 2m$, dergestalt daß ω die neuen Abscissen bezeichnet; so erhält man die Gleichung $u^2 + \omega^2 = n^2 : 4m^2$, welche die Natur eines Kreises ausdrückt. Denn es sei AB der Durchmesser, welcher $= n : m$ ist, *fig. 16* und AC = CB, so wird, wenn AP eine Abscisse

scisse z ist, zu der die Applikate PM gehört, $CP = AC - AP = n : 2m - z = \omega$ werden. Folglich ist $CP^2 + PM^2 = n^2 : 4m^2 = AC^2$. Da nun $CM^2 = CP^2 + PM^2$, wegen des rechten Winkels bei P, ist, so folgt, daß eine iede aus C an die Ellipse gezogne gerade Linie der halben Axe AC gleich, und folgends die Ellipse ein Kreis sei. Also ist der Kreis eigentlich eine Ellipse in der der Hauptdurchmesser seinem Parameter gleich ist.

Wenn eine Hyperbel auf eben die Art bestimmt wird, daß nämlich beim Hauptdurchmesser $m = r$ ist, so heißt dieselbe eine **rechtwinklichte Hyperbel.**

Das vierte Buch
von der Parabel.

§. 1. Ein ieder Durchmesser der Parabel hat eine Spitze, und keiner mehr als eine. Denn da $u^2 = nz : r - q$ die Gleichung für die Parabel ist, wenn man einen Durchmesser zur Axe der Abscissen macht, und die Applikaten zu ihm ordnet; die Grösse aber q beständig würklich und bestimmt ist, und n niemahls = o sein kan: (III. §. 12.) so muß z allezeit einen einzigen bestimmten Werth haben, wenn u = o ist. Nun aber ist derselbe Werth von z dieienige Abscisse, in deren einen Endpunkt die Spitze des Durchmessers fällt. (Einl. §. 4. I. §. 5.) Also hat ein ieder Durchmesser eine einzige Spitze.

§. 2. Man sieht hieraus, daß die Gleichung $y^2 = nx$ die Natur der Parabel ausdrücken könne, man nehme welchen Durchmesser von ihr man wolle. Denn sie sezt bloß voraus, der angenommne Durchmesser habe eine Spitze. (III. §. 1. 4.) Dieses aber findet bei allen Durchmessern Statt.

„Folglich sind in der Parabel die Quadrate „der zugeordneten Applikaten beständig den „Rechtecken aus den Abscissen, zu denen sie „gehören, und aus dem Parameter ihres Durchmessers

„messers gleich; und sie verhalten sich also, wie „diese Abscissen „. Man nimmt hier nämlich den Anfangspunkt der Abscissen in der Spitze des Durchmessers an.

§. 3. Wenn man in dieser Gleichung $y^2 = nx$, $a + z + cu$ statt x, und $b + fu$ statt y sezt, so erhält man die Gleichung $f^2u^2 + 2bfu + b^2 = an + nz + ncu$, welche überhaupt statt findet, wenn man eine, nach Gefallen gezogne, dem Durchmesser CD gleichlauffende
fig. 18. Linien AE, zur Axe der Abscissen macht, die Axe der Applikaten mag liegen wie man will. Die Grössen f, c werden dergestalt bestimmt, daß man, wenn IF eine Applikate zur AE, und ID zum Durchmesser CD geordnet ist, welche Linie die AE in E durchschneidet, die Verhältnisse IF : FE = 1 : c, und IF : IE = 1 : f erhält. (Einl. §. 4.) Ist nun IF so gezogen daß $FE = 2b \times IE : n$ ist, so wird $2bf = nc$, und daher $f^2 u^2 + b^2 = an + nz$, welcher Gleichung alle Glieder fehlen, in denen die erste Potenz von u ist, und die daher anzeigt, daß AE ein Durchmesser sei, zu dem IF geordnet ist. (I. §. 6.) „Folglich ist in der Parabel eine iede „dem Durchmesser CD gleichlauffende Linie ein „Durchmesser zu dem die Applikaten unter einem gewissen Winkel geordnet sind.

§. 4.

§. 4. Wenn man eine gerade Linie If, die der Parabel in zweenen Punkten I und x begegnet, in zwo gleiche Hälften FI = Ff theilt; so ist die durch F gehende, dem Durchmesser CD gleichlauffende Linie AE, gleichfalls ein Durchmesser, zu dem IF geordnet ist. Denn man nehme AE als die Axe der Abscissen, und die Axe der Applikaten der IF gleichlauffend an, so ist $f^2 u^2 + 2bfu + b^2 - na - nz - ncu = o$ die Gleichung für die Parabel; (§. praec.) und also $(2bf - nc) : f^2$ die Summe beider Applikaten, die zu einer beliebigen Abscisse gehören. (Einl. §. 7.) da nun IF = Ff ist, so wird die Summe der zu AF gehörigen Applikaten, = o, und daher $2bf - nc = o$ wenn z = AF ist. Folglich ist überhaupt $f^2 u^2 + b^2 - na - nz = o$, woraus erhellet; daß AF ein Durchmesser sei, zu dem FI geordnet ist. (I. §.6.)

Also sind alle Durchmesser der Parabel unter einander gleichlauffend, und dieser Kegelschnitt hat nicht mehr, als einen einzigen Hauptdurchmesser.

§. 5. Es sei MT eine Berührungslinie an einem beliebigen Punkte der Parabel M, die dem Durchmesser AB in T begegnet, zu welchem MP geordnet ist, so wird durchgehends AT = AP. (II. §. 14.)

Ferner ist die Subnormal PB, wenn TB der Hauptdurchmesser der Parabel, und MB auf MT senkrecht ist, der Hälfte des Parameters von der Axe TB gleich. (II. §.23.)

§. 6. Da also $MT^2 : AT = (MP^2 + TP^2) : AP = (n \times AP + 4AP^2) : AP = n + 4AP$ ist, indem n den Parameter des Hauptdurchmessers bezeichnet, so folgt: „daß „der Parameter eines jeden Durchmessers der „Parabel dem Parameter der Axe, und der, „zu der aus der Spitze des Durchmessers zur „Axe geordneten Applikate, gehörigen Abscisse, „viermahl genommen, gleich sei. Denn wenn Ak der MT gleichlauffend ist, und dem Durchmesser Mk in k begegnet, so ist, da auch Mk, AB gleichlauffend sind, (§ 4.) $AT = Mk$ und $MT = Ak$; folglich $MT^2 : AT = Ak^2 : Mk$. Nun aber ist Ak zum Durchmesser Mk geordnet, (II. §.19.) und $\mu \times Mk = Ak^2$, oder $Ak^2 : Mk = \mu$, wenn μ der Parameter von Mk ist. (IV. §.2.) Folglich wird $\mu = MT^2 : AT = n + 4AP$.

§. 7. Wenn F der Brennpunkt der Parabel ist, so wird $AF = \frac{1}{4}n$, und $FM = AF + AP$. (II. §. 22.) $= AF + AT$ (IV. §. 5.) $= TF$. Folglich sind die Winkel FTM, FMT einander gleich, und eine jede der AB gleichlauffende Linie Mk fällt auf die Berührungslinie

nie $T\mu$ am Punkte M, unter einem Winkel der = TMF = $\frac{1}{2}$ MFB ist.

Hieraus begreift man, wenn man die ersten Grundsätze der Optik zu Hülfe nimmt, daß, wenn die Parabel den Durchschnitt eines Spiegels vorstellte, dessen Oberfläche durch ihre Umdrehung um die unbewegliche Axe AB beschrieben wird; alle derselben Axe gleichlauffende Strahlen von ihm in F zurückgeworfen werden würden, welcher Punkt also alsdenn ein würklicher Brennpunkt sein würde.

§. 8. Zieht man FO senkrecht auf TM, so wird TO = OM, und daher TO: OM = TA: AP. Folglich muß die AO der MP gleichlauffend, und also eine Berührungslinie in A sein. (II. §. 19.) Es ist demnach FA: FO = FO: FT = FO: FM. (§. praec.)

§. 9. Wenn man die MK verlängert, biß sie mit der FO in E zusammenstößt, so ist OF = OE und ME = MF weil die rechtwinklichten Dreiecke MOF, MOE, wegen dergleichen Winkel OMF, EMO (§. 7.) einander gleich sind. Läßt man also EG senkrecht auf die Axe TB herab, so ist FO: OE = FA: AG und folglich FA = AG.

§. 10. Wenn FI aus dem Brennpunkte zur Axe geordnet ist, und der ME in H begegnet,

so ist FM - MH = $\frac{1}{2}$ n = FG = FI in dem Falle da MP weiter von A entfernt ist, als FI; oder, wenn eine zur Axe geordnete Applikate LR zwischen IF und A fällt, und Lh auf IF senkrecht ist, so wird FL + Lh = $\frac{1}{2}$ n. Denn es ist FM = FT, MH = FP, AP = AT, FA = AG, und daher FM - MH = FT - FP = FT - AP + AF = FT - AT + AG = FT - TG.

§. 11. Endlich ist der Parameter von Mk = n + 4AP (§. 6.) = 4 AF + 4 AT = 4 MF = 4 ME.

§. 12. Wenn ARQ der Krümmungskreis in der Spitze A des Hauptdurchmessers der Parabel ist, so fällt dessen Mittelpunkt N in denselben Durchmesser, dergestalt daß AN = $\frac{1}{2}$ n, oder der ganze Durchmesser AQ = n ist. (II. §. 34.) Zieht man folglich nach Gefallen eine Krümmungssehne AR, und durch R eine zur AB geordnete Applikate MP, so ist aus der Natur des Kreises * AR^2 = AQ × AP = n × AP. Nun aber ist auch PM^2 = n × AP. Folglich wird AR = PM.

Verlängert man die PM biß sie den Kreis in S durchschneidet, so ist PR = PS ** und folglich

AP^2

* Elem. VI. 13. ** Elem. III. 3.

$AP^2 = AR^2 - PR^2 = PM^2 - PR^2 = (PM - PR) \times (PM \times PR) = RM \times SM$. Nun aber ist $MV \times MQ = RM \times SM$, wenn MQ den Kreis in V durchschneidet. * Also wird $AP^2 = MV \times MQ$.

* Elem. III. 36.

Das fünfte Buch.

Von den Eigenschaften, welche die Ellipse und die Hyperbeln miteinander gemein haben.

fig. 6. §. 1. Die Ellipse und die Hyperbel wird durch die Gleichung $y^2 \pm m^2x^2 - nx = 0$ bezeichnet, aus welcher folgt, die Axe der Abscissen sei ein Durchmesser von zwoen Spitzen m, G dessen Grösse $mG = n : \pm m^2$ ist. (III. §. 5. 6.)

Theilt man also denselben in zwo gleiche Hälften $mC = CG$, und nimmt C zum Anfangspunkte der Abscissen an, so wird, wenn man iede neue Abscisse, als Cf, z nennt, $x = n : \pm 2m^2 + z$, und man erhält also die Gleichung $y^2 + n^2 : \pm 4m^2 \pm m^2 z^2 + nz - n^2 : \pm 2m^2 - nz = 0$, oder $y^2 \pm m^2 z^2 - n^2 : \pm 4m^2 = 0$, aus der man einerlei Werthe von y erhält, man mag z positiv oder negativ annehmen. Wenn man also zu beiden Seiten des Punktes C nach Gefallen gleiche Theile $CF = Cf$ des Durchmessers nimmt, so ist die aus F geordnete Linie der aus f geordneten gleich.

§. 2. Sezt man ferner in der eben gefundnen Gleichung $p\omega - ru$ statt z, und $su - q\omega$ statt y, so

so erhält man eine neue Gleichung (A) $s^2 u^2 - 2qsu\omega + q^2\omega^2 \pm m^2 p^2 \omega^2 \mp 2m^2 pru\omega \pm m^2 r^2 u^2 - n^2 : \pm 4m^2 = 0$ welche überhaupt statt findet, die beiden Axen mögen liegen wie man will, wenn sie nur in C zusammenstossen; und in der die Abscissen durch ω, die Applikaten aber durch u bezeichnet sind. (Einl. §.6) daher wird, wenn $u = 0$ ist, $q^2\omega^2 \pm m^2 p^2 \omega^2 - n^2 : \pm 4m^2 = 0$, und $\omega = \pm \surd (n^2 : 4m^2 (q^2 \pm m^2 p^2))$. „Also trift eine jede durch den Punkt C gehende gerade Linie a, b „den Kegelschnitt entweder gar nicht an, (welches bloß bei den Hyperbeln geschehen kan, „wenn $\surd (n^2 : -4m^2 (q^2 - m^2 p^2))$ eine eingebildete Grösse, oder auch, wenn $q = mp$ ist) „oder sie trift ihn in zween Punkten a und b an, „dergestalt daß $aC = bC$ ist.„ Aus dieser Ursache pflegt man den Punkt C den Mittelpunkt der Ellipse oder der Hyperbeln zu nennen.

§. 3. Wenn BE eine gerade Linie ist, die dem Kegelschnitte in zween Punkten B und E begegnet, und man macht $BL = LE$ so ist eine durch L und den Mittelspunkt C gehende gerade Linie ein Durchmesser, zu dem BL geordnet ist. Denn wenn man CL zur Axe der Abscissen macht, und die Axe der Applikaten der BL gleichlauffend annimmt, so muß in der Gleichung (A)

des vorhergehenden §. die Summe der Werthe von u = o werden, wenn ω = CL ist. Diese Summe aber ist $(2qs \times CL \pm 2m^2pr \times (L) : (s^2 \pm m^2 r^2)$ (Einl. §. 7.) Also ist $qs \pm m^2pr = o$ und daher (B) $s^2 u^2 + q^2 \omega^2 \pm m^2 p^2 \omega^2 \pm m^2 r^2 u^2 - n^2 : 4m^2 = o$. Da dieser Gleichung alle Glieder fehlen in denen die erste Potenz von u ist, so folgt: es sei CL ein Durchmesser von dessen zugeordneten Applikaten BL eine ist. (I. §. 6.)

§. 4. Folglich kan die Ellipse und Hyperbel keinen Durchmesser haben, der nicht durch den Mittelpunkt C geht. Denn gesezt es wäre od ein ausser C liegender Durchmesser, und BL eine seiner zugeordneten Applikaten. Man ziehe CL, so wird diese Linie ein Durchmesser sein, von dessen zugeordneten Linien BL eine ist. (§. praec.) Da es nun aber unmöglich ist, daß zween verschiedne Durchmesser einerlei zugeordnete Linie haben sollten, so folgt: es sei od kein Durchmesser.

§. 5. Wenn man in der Gleichung (B) §. 3. u statt ω, und ω statt u sezt, so verwandelt sich die Axe der Applikaten CM in die Axe der Abscissen, und die Axe der Abscissen Ca in die Axe der Applikaten; alles übrige bleibt unverändert. Dadurch aber erhält man die Gleichung $s^2 \omega^2 + q^2 u^2 \pm m^2 p^2 u^2 \pm m^2 r^2 \omega^2 -$

n^2:

$n^2 : \pm 4m^2 = 0$, der gleichfalls alle Glieder fehlen in denen die erste Potenz von u ist, und die daher anzeigt: daß CM gleichfalls ein Durchmesser sei, zu dem Ca geordnet ist. (I. §. 6) Solche Durchmesser von denen der eine den zugeordneten Applikaten des andern, und dieser den zugeordneten Applikaten des erstern, gleichlauffend ist, nennt man einander zugeordnete Durchmesser; und es ist offenbar daß ein ieder Durchmesser einen andern habe, zu dem er, und der ihm zugleich, zugeordnet ist.

§. 6. Man sieht daher so gleich daß ieder Durchmesser der Ellipse zwo Spitzen habe. Für die Hyperbeln aber erhält man aus der Gleichung (B) §. 3. $u = \pm \surd (n^2 : - 4m^2 (q^2 - m^2 p^2))$ und $\omega = \pm \surd (n^2 : - 4m^2 (s^2 - m^2 r^2)) = \pm \surd (n^2 m^2 p^2 : - 4m^2 (m^2 p^2 s^2 - q^2 s^2))$ weil $qs = m^2 pr$ ist. (§. 3.) Ist $mp > q$, so werden beide Werthe von u würklich, und beide Werthe von ω eingebildet; ist hingegen $mp < q$, so sind beide Werthe von ω würklich, und die von u eingebildet. Daß $mp = q$ sein sollte ist unmöglich. Denn wäre es möglich, so würde, da $qs = m^2 pr$ ist, auch $s = mr$ sein, und man erhielte daher aus der Gleichung (B) §. 3 $n = 0$ welches unmöglich ist. (II. §. 20) Es folgt also, da die Werthe von u und ω zugeordnete Halbmesser bezeichnen (§. praec.) daß

von allen zugeordneten Durchmessern der Hyperbel, der eine sie in zween Punkten, der andre gar nicht, antrift.

Damit man also beiden zugeordneten Durchmessern der Hyperbeln gewissermassen eine würkliche Grösse gebe, bedient man sich des folgenden Mittels. Wenn a der würkliche und $b\sqrt{-1}$ der eingebildete unter den zugeordneten Halbmessern ist; so schneidet man zu beiden Seiten des Mittelpunkts von dem eingebildeten Durchmesser zween Theile ab, deren ieder $= b$ ist; und es wird allemahl dieser Theil b verstanden, wenn man von dem Halbmesser $b\sqrt{-1}$ als von einer würklichen Grösse redet,

§. 7. Man sieht ferner ein daß die Ellipse und Hyperbel zween Hauptdurchmesser haben, die einander zugeordnet sind. Daß aber kein Kegelschnitt, wenn er nicht ein Kreis ist, mehr als diese zween Hauptdurchmesser haben könne, wird aus folgenden leichte erhellen.

Man erhält, wenn eine den Durchmesser Cb zugeordnete Applikate ihm in L dem Hauptdurchmesser aber mG, in r begegnet, und durch den Punkt L zu diesem die Li geordnet wird, folgende Proportionen aus der Gleichung des 2§. $Lr : Li = 1 : s$, $Lr : ri = 1 : r$, $CL : Ci = 1 : p$, $CL : Li = 1 : q$ und folglich $Li : ri = s : r$ und $Ci : Li = p : q$. (Einl. §. 6.) Wäre

also

also auch ab ein Hauptdurchmesser, so wären bei L rechte Winkel und Ci: Li = Li: ir, * folglich qs = pr. Nun aber ist auch qs = ± m^2 pr, da ab ein Durchmesser ist. (V. §. 3) Also wird $\pm m^2 = 1$, und daher $y^2 + z^2 - n^2 : 4 = 0$ (V. §. 1.) welche Gleichung die Natur eines Kreises ausdrückt. (III. §. 14.)

§. 8. Wenn wir in der leztern Gleichung des 1 §. $n^2 : \pm 4m^2 = \pm b^2$, und $n^2 : 4m^4 = a^2$ machen, so erhalten wir $y^2 \pm b^2 z^2 : a^2 - b^2 = 0$, und (A) $s^2 u^2 + q^2 \omega^2 \pm p^2 b^2 \omega^2 : a^2 \pm b^2 r^2 u^2 : a^2 \mp b^2 = 0$, und $a^2 \pm b^2$ ist bei der Ellipse die Summe, bei der Hyperbel aber der Unterschied, der Quadrate von den zugeordneten Halbmessern Cm, CB, die man in der Hyperbel nach dem 6 §. bestimmt hat, und welche wir als die Haupthalbmesser annehmen. Dadurch wird s = sin. LrC, r = cos. LrC, q = sin. aCr, p = cos. aCr (§. praec.) und sin. tot. = 1, folglich $p^2 + q^2 = 1$ und $s^2 + r^2 = 1$. ** Da also $qs = \pm b^2 pr : a^2$ ist, (V. §. 3) so wird

$s^2 +$

* Element. VI. 8.

** Dieses sind sehr bekannte Sätze der Trigonometrie. Man sehe zum Ueberfluß Wolfs Ausz. Trigonom. 2 Lehrs.

$s^2 + q^2 s^2 a^4 : b^4 p^2 = 1$, und $s^2 b^4 p^2 + q^2 s^2 a^4 = b^4 p^2$, und $s^2 b^4 p^2 - a^4 s^2 p^2 - b^4 p^2 + a^4 s^2 = o$, folglich $p^2 = a^4 s^2 : (a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4)$, und $q^2 = (b^4 - s^4 b^4) : (a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4)$. Sezt man nun in der Gleichung (A) $u = o$, so erhält man ω^2 oder $Ca^2 = \pm b^2 a^2 : (a^2 q^2 \pm b^2 p^2)$ und das Quadrat des zugeordneten Halbmessers (§. 6.) $\pm CM^2$, oder u^2, indem man $\omega = o$ sezt, $= \pm b^2 a^2 : (a^2 s^2 \pm b^2 r^2)$. (Einl. §. 4.) $= \pm b^4 a^2 p^2 : (a^2 s^2 b^2 p^2 \pm q^2 s^2 a^4) = (\pm b^4 a^6 s^2 : (a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4)) : ((a^6 s^4 b^2 \pm b^4 s^2 a^4 \mp s^4 b^4 a^4) : (a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4)) = \pm b^2 a^2 : (a^2 s^2 \pm b^2 \mp s^2 b^2)$. Auf eben die Art wird $Ca^2 = \pm b^2 a^2 : ((a^2 b^4 - a^2 s^2 b^4 \pm a^4 s^2 b^2) : a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4)) = (a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4) : (\pm b^2 \mp s^2 b^2 + a^2 s^2.)$ Daher erhält man $Ca^2 \pm CM^2 = (\pm a^2 b^2 + a^4 s^2 + b^4 - s^2 b^4) : (a^2 s^2 \pm b^2 \mp s^2 b^2) = a^2 \pm b^2$. „Also ist in der Ellipse die Summe, „und in der Hyperbel der Unterschied der Qua„drate von jeden zween zugeordneten Halb„messern beständig einerlei, nämlich $= a^2$ „$\pm b^2$.

§. 9. Man lasse aus dem Endpunkte M des einen zugeordneten Halbmessers CM eine senkrechte

rechte Linie MK auf den andern Cb; so ist der Winkel MCb der Summe der beiden Winkel MCm = LrC und mCb = aCr gleich, und daher sin. MCb = ps + qr; * folglich MK: MC = sin. MCK: 1 = ps + qr: 1, und also MK = MC × (ps + qr). Nun aber ist aus dem vorhergehenden §. $MC\sqrt{\pm 1} = ab\sqrt{\pm 1} : \sqrt{(a^2 s^2 \pm r^2 b^2)}$, und Ca oder Cb = $ab \times \sqrt{\pm 1} : \sqrt{(a^2 q^2 \pm p^2 b^2)}$ Folglich wird $MK\sqrt{\pm 1} = ab\sqrt{\pm 1}\,(ps + qr) : \sqrt{(a^2 s^2 \pm r^2 b^2)}$, und $Cb \times MK\sqrt{\pm 1} = \pm b^2 a^2 (ps + qr) : \sqrt{(a^4 s^2 q^2 \pm a^2 b^2 q^2 r^2 \pm a^2 b^2 p^2 s^2 + b^4 r^2 p^2)}$ Da nun $b^4 p^2 r^2 = q^2 s^2 a^4$ ist, (§. praec. und §. 3.) so wird $a^4 s^2 q^2 + b^4 r^2 p^2 = \pm 2a^2 b^2 pqrs$ und daher $a^4 s^2 q^2 \pm a^2 b^2 q^2 r^2 \pm a^2 b^2 p^2 s^2 + b^4 r^2 p^2 = \pm a^2 b^2 ((rq + ps)^2)$. Also ist $Cb \times MK\sqrt{\pm 1} = ab\sqrt{\pm 1}$, und Cb × MK = ab. Es ist aber, wie wir angenommen haben, a der eine Haupthalbmesser Cm, und b der andre CB. (§. praec.) Also wird ab = Cm × CB. Man stelle sich nunmehr zwei Paralle-

* Dieses gründet sich auf den trigonometrischen Satz: Wenn a und b zween Winkel bedeuten, so ist sin. (a + b) = sin. a × cos. b + sin. b × cos. a; welchen Herr Kraft in den institut. Geom. sublim. §. 61. beweiset.

rallelogramme vor, von denen das eine CB, Cm, das andre aber CM, Cb zu Seiten hat: so wird des erstern Grundlinie Cm, die Höhe CB; des andern Grundlinie Cb, die Höhe, MK sein; und beide werden sich gegen einander = CB : MK + Cm : Cb * oder = CB ⋊ Cm : MK ⋊ Cb verhalten, und folglich einander gleich sein. „Also sind alle zwischen zween zu„geordneten Durchmessern beschriebne Paralle„logramme unter einander gleich.„

§. 10. Das Dreieck MCb ist die Hälfte des Parallelogrammi, dessen Höhe MK, und Cb die Grundlinie ist; ** und eben so ist das Dreieck BmC die Hälfte des Parallelogr. zwischen CB, Cm. „Wenn man also die End„punkte M b n a ieder zugeordneten Durchmesser „ab, Mn, zusammenzieht, so ist das Paralle„logr. Manb beständig von einerlei Grösse, „indem es halb so groß als das Parallelogr. „zwischen ab, Mn ist.„

fig. 17. §. 11. Wenn AM, BN Berührungslinien an den Spitzen A, B eines Durchmessers, und folglich unter einander gleichlauffend sind; (II. §. 19.) und es durchschneidet sie eine dritte Berührungslinie an einem Punkte G, in M und N; so ist BN ⋊ AM = CL^2, indem CL den zu AB geordneten Halbmesser bezeichnet. Denn man

* Elem. VI. 1. ** Elem. I. 41.

man ordne PG aus dem Punkte G nur AB, und nenne T den Punkt, in dem GN die AB durchschneidet; so ist $CA^2 = CP \times CT$ (II. §. 12. 16.), oder aus der Gleichung $y^2 \pm b^2 z^2 : a^2 \mp b^2 = 0$, (V. §. 8.) $a^2 : z = CT$. Folglich wird $AM : BN = a - a^2 : z : a + a^2 : z = z - a : z + a$, und also $AM = BN \times (z - a) : (z + a)$. Es wird aber auch aus eben der Gleichung $PG^2 = \mp b^2 z^2 : a^2 \pm b^2$ und $PG = b\sqrt{(a^2 - z^2)} \times \sqrt{\pm 1} : a$. Folglich ist $b\sqrt{(a^2 - z^2)} \times \sqrt{\pm 1} : a : z - a^2 : z = AM : a - a^2 : z$, und daher $AM = b\sqrt{(z - a)} \times \sqrt{\pm 1} : \sqrt{(z + a)}$, und $AM^2 : \pm b^2 = (z - a) : (z + a)$. Also ist $AM = BN \times AM^2 : \pm b^2$, oder $\pm b^2 = BN \times AM$.

§. 12. Da in der Gleichung $y^2 \pm b^2 z^2 : a^2 \mp b^2 = 0$, $n^2 : \pm 4m^2 = \pm b^2$, und $n^2 : 4m^4 = a^2$ ist, (V. §. 8.) so wird $\pm b^2 = \frac{1}{2} na$. Nun aber ist n der Parameter, und b der zugeordnete Halbmesser, des Halbmessers a. „Also ist von ieden zu einander geordneten „Halbmessern der eine die mittlere Proportio„nalzahl zwischen dem andern, und dem halben „Parameter dieses leztern.„

§. 13. Wenn AB der Hauptdurchmesser, C der Mittelpunkt, MT eine Berührungslinie in *fig. 19.*

F M,

M, MN aber auf diese senkrecht ist, deren die erste die Axe AB in T, die andre in N durchschneidet; und man ordnet MP zur Axe, so ist die Subnormal PN $= \pm m^2 x - \frac{1}{2} n$ (II. §. 23.) $= am^2 \pm m^2 z - \frac{1}{2} n$ (weil $x = + a + z$ ist (V. §. 1)) $= \pm m^2 z = \pm b^2 z : a^2 = nz : 2a$. (§. praec.) „Folglich verhält „sich der Hauptdurchmesser 2a zu seinem Para„meter n, wie der Theil von ihm, der zwischen „dem Mittelpunkte und einer zugeordneten Ap„plikate liegt, z, zur dazu gehörigen Subnor„mal PN.„

§. 14. Was die Brennpunkte anbetrift, so ist aus dem vorhergehenden bekannt, daß iede Hyperbel eine Axe habe in der solche Punkte sind. (II. §. 21.) Welche unter den beiden zugeordneten Axen aber derselben (V. §. 7.) diese sei, sieht man so gleich. Denn es hat nur die eine von ihnen Spitzen. (V. §. 6.) Nun aber haben wir bei Untersuchung der Brennpunkte vorausgesezt, die Axe, in der diese Punkte liegen, habe eine Spitze, weil wir in selbiger den Anfangspunkt der Abscissen annahmen. (II. §. 21) Folglich hat iede Hyperbel nur zween Brennpunkte, und diese liegen in derienigen Axe, welche Spitzen hat.

Bei der Ellipse hingegen, da beide zugeordnete Axen mit Spitzen versehen sind, befinden

sich

sich diese Punkte in derjenigen, die nicht kleiner als die andre ist. Denn da 1 nicht kleiner als m^2 sein muß, (II. §. 21.) so kan auch a nicht kleiner als b sein. (V. §. 8.) Nun sind hier zween Fälle möglich. Entweder ist $a = b$ oder nicht. Ist das erste: so wird $m^2 = 1$, die Ellipse ist ein Kreis (III. §. 14) und beide Brennpunkte fallen im Mittelpunkte zusammen (II. §. 21.). Ist hingegen a nicht $= b$, und blos in diesen Falle heist die Ellipse in eigentlicherm Verstande eine Ellipse, so hat diese Linie zween ausser einander, in der grössern Axe, liegende Brennpunkte.

§. 15. Es sein also F und f die beiden Brennpunkte in der Axe AB, und NL, Nl senkrecht auf die geraden Linien MF, Mf, so ist $Ml = ML = \frac{1}{2}n$. (II. §. 23.) Da nun überdieses die beiden rechtwinklichten Dreiecke NML, NMl die Seite MN gemein haben, so sind sie einander ähnlich und gleich. Daher werden auch die Winkel FMN, NMf, und also auch oMf, TMF einander gleich; woraus erhellet, wenn man die Optik zu Hülfe nimmt, daß für Strahlen, die aus dem einen Brennpunkte als f auf einen Elliptischen oder Hyperbolischen Spiegel fallen, der andre Brennpunkt F ein wahrer Brennpunkt sei.

§. 16. Wenn man in der Gleichung $a^2 y^2 \pm b^2 z^2 \mp a^2 b^2 = 0$, $\frac{1}{4} n^2$ statt y^2 sezt,

sezt, so erhält man $z^2 = \mp a^2 n^2 : 4b^2 + a^2 = a^2 \mp b^2$, (V. §. 8.) und also z, oder $CF = Cf$ (II. §. 21.) $= \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$. Nun aber ist $PF = CF - z$, und $Pf = CF + z$. Folglich wird $FM^2 = y^2 + CF^2 + z^2 - 2z \times CF = \mp b^2 z^2 : a^2 \pm b^2 \mp b^2 + a^2 + z^2 - 2z \times CF = a^2 + z^2 \times CF^2 : a^2 - 2z \times CF$, und daher $\mp FM = a - z \times CF : a$, und, auf eben die Art, $fM = a + z \times CF : a$. Es ist aber CF bei der Ellipse allemahl kleiner, und bei den Hyperbeln allemahl grösser als a, da es $= \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$ ist. Eben so muß z bei der Ellipse kleiner, und bei den Hyperbeln grösser als a sein, wenn es eine würkliche Applikate haben soll. Folglich ist FM bei den Hyperbeln beständig negativ, bei der Ellipse aber positiv. Da nun $fM \pm FM = 2a$ ist, so folgt: daß „wenn man aus den beiden Brenn„puncten eines Kegelschnittes an einen beliebi„gen Punkt in ihm gerade Linien zieht, bei der „Ellipse, die Summe dieser Linien, oder bei „den Hyperbeln, ihr Unterschied, der Axe gleich „sei, in der die Brennpunkte liegen.„

§. 17. Man lasse aus den Brennpunkten auf TM senkrechte Linien FO, fo, die ihr in O und o, die geraden Linien fM und FM aber, in b und m, begegnen; so sind in den beiden Dreiecken bOM, FOM, oder mMo, fMo

bei O oder o rechte Winkel, und die Winkel bMO, OMF oder mMo, oMf einander gleich; (V. 15.) woraus erhellet daß selbige Dreiecke einander ähnlich und gleich sein. Folglich ist bM = MF, bO = OF, mo = of, mM = Mf. zieht man also überdieses die OC der Mf gleichlauffend, die der Axe in C begegnet, so ist FC : Cf = FO : Ob, folglich FC = Cf woher man sieht daß C der Mittelpunkt sei. (§. praec.) Auf eben die Art muß Co der FM gleichlauffend sein. Nun aber wird aus eben diesem Grunde Co = $\frac{1}{2}$ Fm und CO = $\frac{1}{2}$ bf; und es ist bf = mF bei der Ellipse = fM + MF, bei den Hyperbeln = Mf - MF, in beiden Fällen = AB. (§. praec.) Folglich ist CO = Co = AC. „ Wenn man also an den „Punkt einer Ellipse oder Hyperbel M eine Be„rührungslinie MT zieht, welche einen, über „der Axe AB, in der die Brennpunkte liegen, „aus dem Mittelpunkte des Kegelschnittes be„schriebnen Kreis in den Punkten O und o „durchschneidet; so gehen die, durch diese Punk„te auf MT senkrecht gezognen, geraden Linien „durch die Brennpunkte, f, F. und CO ist der „fM; Co der FM, gleichlauffend.„

§. 18. Ferner ist CP : CA = CA : CT, (II. §. 12. 16.) und daher CT = $a^2 : z$ und TP = $a^2 : z - z = a^2 y^2 : \pm bz$, folglich TM

$= y\surd(b^4 z^2 + a^4 y^2) : \pm b^2 z = y\surd(\pm b^2 z^2 - a^2 z^2 + a^4) : bz\surd\pm 1$. Eben daher wird $TF = a^2 : z - \surd(a^2 \mp b^2)$ und $Tf = a^2 : z + \surd(a^2 \mp b^2)$, (V. §. 16.) folglich $TF \times Tf = a^4 : z^2 - a^2 \mp b^2 = (a^4 - a^2 z^2 \pm b^2 z^2) : z^2$, und daher $TM = y\surd(Tf \times TF) : b\surd\pm 1$, also $TM^2 : y^2 = Tf \times TF : \pm b^2$.

§. 19. Nun aber ist $TM^2 : y^2 = TF^2 : FO^2$. Also wird $FO^2 = TF \times \pm b^2 : Tf$, und daher $fT : FT = fM : FM = \pm b^2 : FO^2$. Auf eben die Art erhält man $Fo^2 = Tf \times \pm b^2 : TF$, und daher $Fo : \surd\pm b^2 = \surd\pm b^2 : FO$. „Also ist der zugeordnete Haupthalbmes„ser die mittlere Proportionalzahl zwischen den „beiden senkrechten Linien fo, FO.„

§. 20. Wenn CR ein der Berührungslinie TM gleichlauffender Halbmesser ist, so wird $TM^2 : CR^2 = TA \times TB : AC^2$. (I. §.10.) und daher $CR^2 = a^2 y^2 z^2 \times FT \times fT : \pm b^2 (a^4 - a^2 z^2)$ (§. 18.) $= y^2 z^2 \times FT \times fT : \pm b^2 (a^2 - z^2)$. Nun aber ist $FM \times fM = a^2 - z^2 \times CF^2 : a^2$ (V. §. 16) $= (a^4 - a^2 z^2 \pm b^2 z^2) : a^2 = FT \times fT \times z^2 : a^2$. Also wird $CR^2 = a^2 y^2 \times FM \times fM : (\pm b^2 a^2 \mp b^2 z^2) = FM \times fM$.

$\times$ fM. Folglich ist auch fM $\times$ FM $= \frac{1}{2}$ p $\times$ CM, indem p den Parameter des Durchmessers CM bedeutet, zu dem CR geordnet ist; (II. §. 19.) da $CR^2 = \frac{1}{2}$ p $\times$ CM ist (V. §. 12.)

§. 21. Wenn AC der Halbmesser der Krümmung an einem Punkte A der Ellipse oder Hyperbel, und AL ein Durchmesser dieser Linien ist, der durch ihren Mittelpunkt K geht, und man den zu AL geordneten Halbmesser aK zieht, welcher die AC in N durchschneidet; so ist diese Linie der Berührungslinie AF gleichlauffend (II. §. 19.) und folglich senkrecht auf AC. Macht man also Ch auf AL senkrecht, so ist CA $\times$ AN $=$ AK $\times$ Ah, indem die beiden Dreiecke ANK, ACh einander ähnlich sind *. Nun aber ist Ah eine halbe Krümmungssehne ** die dem halben Parameter von AL gleich ist; (II. §. 29.) und das Produckt aus diesem halben Parameter und aus AK ist dem Quadrate von Ka gleich. (V. §. 12.) Folglich wird AC $=$ Ka^2 : AN. *fig. 10.*

§. 22. Ist AB eine Krümmungssehne die den Halbmesser Ka in R durchschneidet, und man macht Ar $=$ rB, so wird Cr auf AB senkrecht ***, und folglich AC : Ar $=$ AR : AN. Also

* Elem. VI. 4. ** Elem. III. 3.
*** Elem. III. 3.

Also ist $\frac{1}{2}$ AB $\times$ AR $=$ Ka^2, (§. praec.) und es erhellet hieraus, daß AR $\times$ RB $=$ 2 Ar $\times$ AR - AR^2 $=$ 2 Ka^2 - AR^2 sei. Nun aber ist, wenn H und ϱ die Punkte sind, in denen der Durchmesser Ka den Krümmungskreis antrift AR $\times$ RB $=$ HR $\times$ Rϱ * $=$ HN^2 - HR^2. Folglich wird 2Ka^2 $=$ HN^2 - NR^2 + AR^2 $=$ HN^2 + AN^2 $=$ AH^2, und daher Ka : AH $=$ 1 : $\sqrt{2}$.

* Elem. III. 35.

Das

Das sechste Buch
von den besondern Eigenschaften der Hyperbel.

§. 1. Die Gleichung $s^2 u^2 - 2qsu\omega + q^2 \omega^2 - m^2 p^2 \omega^2 + 2m^2 pru\omega - m^2 r^2 u^2 + n^2 : 4m^2 = 0$ welche wir im 2 §. des vorhergehenden Buches fanden, drückt die Natur der Hyperbeln allezeit aus, wenn der Anfangspunkt der Abscissen in ihrem Mittelpunkte C ist. Wir sahen damahls daß, wenn $mp = q$ ist, die Axe der Abscissen der Hyperbel nirgend begegnen könne; und diesen Fall müssen wir iezt etwas genauer betrachten. *fig. 20.*

Wenn CI der Durchmesser ist, für den die Gleichung $y^2 - m^2 z^2 + n^2 : 4m^2 = 0$ (§. 1.) gehört, IL aber die Hyperbel an seiner Spitze berührt, und also dessen zugeordneten Applikaten gleichlauffend ist; (II. §. 19.) so findet man, wenn CL dieienige Axe der Abscissen bezeichnet, bei der $mp = q$ wird, da nach dem 7 §. CI: LI = p: q ist, CI: LI = 1: m = a: b, (V. §. 8.) und folglich IL = b. Ist also auch lI von der andern Seite = b, so muß die durch C und l gehende Axe gleichfalls eine solche sein, bei der $mp = q$ ist.

Jede andre Axe als Ci trift die Hyperbeln in zweenen Punkten an, die so liegt; daß $q < mp$, oder $Ii < b$ ist; und sie trift dieselben gar nicht an, wenn sie, wie $C\lambda$, die IL in einem Punkte λ durchschneidet, der sich nicht zwischen den beiden Linien lC, LC befindet. (V. §. 2) Also sondern die beiden, durch l, und L, und den Mittelpunkt C gehenden geraden Linien, welche man die **Asymptoten der Hyperbeln** nennt, die würklichen Durchmesser von den übrigen ab, welche eine eingebildete Grösse haben, dergestalt, daß die erstern alle innerhalb den Winkel lCL, die leztern aber ausser ihn fallen.

§. 2. Wenn man also an der Spitze I eines Durchmessers der Hyperbel eine Berührungslinie zieht, und von selbiger zu beiden Seiten Theile IL, Il abschneidet, welche dem zu CI geordneten Halbmesser (V. §. 6.) gleich sind; so sind die durch die Punkte l, C und L, C gehenden geraden Linien Asymptoten.

§. 3. Gesezt es erhalte y den Werth a, wenn $z = b$ ist, so ist $(qa + m^2 pb) : (m^2 p^2 - q^2)$ allemahl eine bestimmte Grösse, ausser in dem Falle da $mp = q$, oder die Axe der Abscissen eine Asymptote wird. Da man also die Axe der Applikaten legen, oder dem ω einen so grossen bestimmten Werth geben kan, als man will; so können wir $(qa + m^2 pb) : (m^2 p^2 -$

$q^2)$

$q^2) = \omega$ setzen, wenn mp nicht $= q$ ist. Alsdenn aber wird $mp : q = a + q\omega : mp\omega - mb = s : mr$, weil $p\omega - ru = z$ und $su - q\omega = y$ ist, (V. §. 2.) folglich $2m^2 pr - 2qs = 0$, und $s^2 u^2 + q^2 \omega^2 - m^2 p^2 \omega^2 - m^2 r^2 u^2 + n^2 : 4m^2 = 0$ welche Gleichung anzeigt, die angenommne Axe der Abscissen sei ein Durchmesser, zu dem die Applikaten geordnet sind. (I. §. 6.) Folglich ist eine iede durch den Mittelpunkt C gehende gerade Linie, ausser den beiden Asymptoten Cl, CL, ein Durchmesser der Hyperbel, zu dem unter einem gewissen Winkel die Applikaten geordnet sind.

§. 4. Man sieht daher, daß iede Hyperbel nicht mehr als zwo Asymptoten haben könne: und hieraus weiter, daß, wenn man nach Gefallen eine Berührungslinie an einem Punkte D der Hyperbel zieht, die den Asymptoten in A und B begegnet, nicht nur AD = DB sei, sondern auch AB die Grösse des zu CD geordneten Durchmessers habe. Wollte man das erste läugnen, so sei Cλ eine andre Asymptote, die mit der Asymptote LC den Winkel LCλ, und mit der lC den Winkel BCλ macht; so sind alle zwischen LCλ, und BCλ gezogne gerade Linien nicht nur Durchmesser, (§. praec.) sondern auch zu beiden Seiten von einer würklichen oder von einer eingebildeten Grösse. (VI. §. 1.) Also son-

sondert die $C\lambda$ nicht die eingebildeten von den würklichen Durchmessern ab, und kann folglich keine Asymptote sein. (VI. §. 1.) Läugnete man den leztern Saz: daß nämlich DB = DA dem zu CD geordneten Halbmesser gleich sein, so mögen Db, Da diese Grösse haben. Es werden alsdenn Cb, Ca Asymptoten der Hyperbel. (§. 2.) Dieses aber ist, wie wir eben gesehen haben, unmöglich.

§. 5. Es erhellet aus dem ersten §. daß die Gleichung für die Hyperbel $s^2 u^2 - 2qsu\omega + 2m^2 pru\omega - m^2 r^2 u^2 + b^2 = 0$, oder (A) $u^2 - 2mpu\omega : (s + mr) + b^2 : (s^2 - m^2 r^2) = 0$ ist, wenn man eine Asymptote als Axe, und C als den Anfangspunkt der Abscissen annimmt, die Axe der Applikaten mag liegen, wie man will. Das Produckt der Werthe von u ist beständig $b^2 : (s^2 - m^2 r^2)$, man mag ω so groß annehmen, als man will. (Einl. §. 7.) „Wenn man also nach Gefallen „zwo gerade gleichlauffende Linien FI, DP zieht, „die der Hyperbel in zweenen Punkten F, I „und D, P dem einen Asymptoten aber in P und „C begegnen, so ist $Dp \times pP = CI \times CF$, „oder $= CI^2$, wenn CI ein Halbmesser ist.„ Auf eben die Art muß $Dq \times qP = CI^2$ sein, wenn q den Punkt bezeichnet, in welchem Dp der andern Asymptoten begegnet. Also ist

Dp $\times$ pP

$Dp \times pP$ oder $Dq \times pP + qp \times pP = Dq \times qP$ oder $= Dq \times qp + Dq \times pP$ und daher $Pp = Dq$. „Folglich sind die, zwischen „beiden Asymptoten und der Hyperbel liegenden „Theile einer geraden Linie, welche die Hyper„bel in zweenen Punkten durchschneidet, einan„der gleich.

§. 6. Man könnte einige Schwürigkeit finden, zu begreifen, was der Werth $b^2 : (s^2 - m^2 r^2)$ sagen wolle, wenn $s^2 = m^2 r^2$, oder $s = \pm mr$ ist. Allein erstlich ist der Fall unmöglich, da $s = mr$ wäre weil man alsdenn, indem man alle Glieder der Gleichung (A) §. praec. mit $s^2 - m^2 r^2$ vermehrt, $b^2 = 0$ bekommt, welches unmöglich ist. Was aber den Fall anbetrift, da $s = - mr$ ist, so verwandelt sich alsdenn die Gleichung (A) in folgende $u\omega = b^2 : 4m^2 pr$ und man sieht aus V. §. 7. und VI. §. 1. gar leicht, daß alsdenn die andre Asymptote selbst die Axe der Applikaten sei. Hieraus schliest man ferner, da weder u noch ω iemahls mehr, als einen einzigen Werth hat „daß alle dem einen oder dem an„dern Asymptoten gleichlauffende Linien der Hy„perbel nur in einem einzigen Punkte begeg„nen„; und, da das Produkt von $u\omega$ beständig von einerlei Grösse $b^2 : 4m^2 pr$ bleibt, welche die Potenz der Hyperbel genannt zu wer-

werden pflegt, „daß, wenn man die Linien „IO, Kr zieht, welche mit der einen Asympto„te gleichlauffend sind, und der andern in O, „r, der Hyperbel aber in I, R, begegnen, sich „CO: Cr = rR: IO, d. i. die Absciſſen um„gekehrt, wie die Applikaten, verhalten.„

Hieraus erhellet, daß die Asymptoten der Hyperbel beſtändig um deſto näher kommen, ie weiter sie fortgehen, obgleich sie mit ihr niemahls zuſammenlauffen können.

fig. 17. §. 7. Wenn alſo zwo Berührungslinien der Hyperbel FT, GT in einem Punkte T zuſammenſtoſſen, durch welchen man die der einen Aſümptote gleichlauffende Linie Tg zieht, welche die Hyperbel in b, und die FG in g durchſchneidet, ſo iſt Tb = bg. (II. §. 14.)

fig. 20. §. 8. Man ziehe aus zweenen, nach Gefallen angenommnen Punkten der Hyperbel D, I auf die eine Aſymptote zwo gleichlauffende Linien IN, DH, und zwo andre, ebenfalls gleichlauffende, MI, DK auf die andre Aſymptote, ſo wird MI ⋈ IN = DK ⋈ DH. Denn es iſt, wenn DI den Aſymptoten in h und m begegnet, DH: IN = Dh: hI = mI: Dm = MI: DK, weil Dh = mI iſt. (VI. §. 5.)

§. 9. Ferner ſind alle Dreiecke, als CEG, CAB, die von einer Berührungslinie, EG oder AB, und den Aſymptotan, CB, CE begränzt wer=

werden, untereinander gleich. Denn man ziehe aus den Berührungspunkten D, F, auf die eine Asymptote, die der andern gleichlauffenden Linien Ff, Dd, so ist Cf $\times$ fF = Cd $\times$ dD; (VI. §. 6.) und daher CE $\times$ CG = CA $\times$ CB, weil, wegen EF = FG und AD = DB, (VI. §. 4.) CB = 2Cd, AC = 2Dd, CE = 2Ff und CG = 2Cf ist. Folglich sind die beiden Dreiecke CGE, CAB einander gleich. *

§. 10. Wenn aA die Hauptaxe, in der die beiden Brennpunkte F, f liegen, CD eine Asymptote, und AD eine Berührungslinie bei A ist, so wird CD = $\sqrt{(a^2+b^2)}$ = CF = Cf. (I. §. 16.) Zieht man nun durch einen nach Belieben angenommnen Punkt M der Hyperbel eine der AD gleichlauffende Linie, die derselben noch ausserdem in N; und den Asymptoten in m, n; der Axe aA aber in P, begegnet, so ist CA : AD = CP : Pm, und daher Pm = Pn = bz : a. Folglich wird Cm = Cn = z $\sqrt{(a^2+b^2)}$: a = z $\times$ CF : a = FM + CA (V. §. 16.) = fM - CA. Ist a = b, so wird Pm = Pn = z = CP und folglich der Winkel mCP = CmP, und nCP = PnC. Daher ist PCm und nCP ieder ein halber, und folglich nCm ein ganzer rechter Winkel. Man sieht also weswegen die Hyperbel in unserm Falle recht- *fig. 21.*

* Elem. VI. 15.

rechtwinklicht genennt wird, (III. §. 14.) da sich ihre Asymptoten unter einem rechten Winkel durchkreuzen.

§. 11. Aus dem, was bisher von den Asymptoten gesagt worden ist, erhellet, daß wenn in der allgemeinen Gleichung für die Hyperbeln $y^2 + axy + by + (\frac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - n^2 : 4m^2 + p = 0$ (III. §. 12) $\frac{1}{4}a^2 = m^2$ ist, die Axe der Abscissen der einen Asymptote gleichlauffend sei. Sie erhält alsdenn folgende Form (A) $y^2 + axy + by + (\frac{1}{2}ab - n)x + \frac{1}{4}b^2 - n^2 : a^2 + p = 0$ und verwandelt sich, indem man $x = z - 2n : a^2 + pu : a^2 e^2$ und $y = n : a - \frac{1}{2}b - pu : ae^2$ sezt, in $uz = e^2$, da denn e^2 die Potenz der Hyperbel ist. (VI. §. 6.) Man findet daher die der Axe der Abscissen gleichlauffende Asymptote so wol, als auch die andre auf folgende Art.

Wenn D ein Punkt in der Hyperbel, DB
fig. 22. eine Applikate, und AB die dazu gehörige Abscisse ist; so mache man den Theil BL der Axe AB, $= DB : a$, den Theil $Af = -2n : a^2$, und ziehe $Ff = n : a - \frac{1}{2}b$ der DB gleichlauffend, so ist die der DL parallele Linie FM die eine, und die der Axe AB gleichlauffende Linie FN, welche die DL in H, die DB aber in N, durchschneidet, die andre Asymptote. Denn ohne uns zu

be-

bekümmern, ob e^2 die Potenz der Hyperbel sei, oder nicht, wollen wir diese Grösse, da sie in der vorgegebnen Gleichung (A) nicht vorkommt, bloß um das Verhältniß DH : HN zu bestimmen, annehmen, indem wir es $= a^2 e^2 : p$ setzen. Da also DN : HN $= 1 : a$ gemacht worden ist, so wird DH : DN $= e^2 a : p$; folglich HN $= pu : a^2 e^2$, und DN $= pu : ae^2$. Wir nennen nämlich die Applikaten, deren Axe FM ist, u; und z die dazu gehörigen Abscissen der Axe FN. Weil nun AB = fB - Af = FH + HN - Af, und DB = Ff - DN ist, so wird überhaupt $x = z + pu : a^2 e^2 - 2n : a^2$, und $y = n : a - \frac{1}{2} b - pu : ae^2$. Wir haben aber eben gesehen, daß, indem wir diese Werthe in die gegebne Gleichung bringen, diese sich in $uz = e^2$ verwandelt; woraus erhellet, daß nicht nur FM, FN die Asymptoten, sondern auch daß e^2 die Potenz der Hyperbel sei. (VI. §. 6.)

§. 12. Wenn zwo verschiedne Hyperbeln AG, BH mit einerley Axen CD, Cm, nach der Gleichung $u^2 z^2 = e^4$ beschrieben werden, so haben beide einerlei Potenz e^2, die Axen Cm, CD sind beider Asymptoten, und sie werden zu einander geordnete Hyperbeln genannt. Zieht man nach Gefallen eine der einen Asymptote Cm gleichlauffende Linie, die der andern in I, und den Hyperbeln in B und A begegnet,

so ist AI = BI, weil für iede Abscisse z, als CI, $\pm$ u = e²: z wird, und + u = AI, - u aber = BI ist. Berührt also AD die eine Hyperbel in A, so wird, da DI = CI (VI. §. 4.), und AI = BI ist, CB der AD gleichlauffend, und gleich. Nun aber hat AD die Grösse des zu AC geordneten Halbmessers, (VI. §. 4.) und ist demselben gleichlauffend. (II. §. 19.) Also ist CB der Grösse und Lage nach der zu AC geordnete Halbmesser, und es müssen daher, wenn man die Durchmesser von eingebildeter Grösse bei der einen Hyperbel nach V. §. 6. bestimmt, alle ihre Endpunkte in die zugeordnete Hyperbel fallen.

Ferner sieht man leicht daß die Berührungslinie bei B der AC, als dem, der Grösse und Lage nach, zu CB geordneten Halbmesser, gleichlauffend sein, (II. §. 19.) und folglich der Asymptote CD in dem Punkte D begegnen müsse.

Ziehet man aus einem Punkte K der Asymptote Kg dem Halbmesser AC, und KL dem zugeordneten CB parallel, deren die erste der Hyperbel in H und g, der CB aber in h; und die andre der Hyperbel in G nnd der AC in L begegnet; so ist KH $\times$ Kg oder Kh² - Hh²

$Hh^2 = AC^2$, (VI. §. 5.) und daher $Hh^2 = Kh^2 - AC^2 = CL^2 - AC^2 = AC \times aL$.

Es wäre iezt, der Ordnung nach, noch übrig von der Ellipse besonders zu reden. Da aber ihre Haupteigenschaften schon vorgekommen sind, als wir von ihr mit der Hyperbel gemeinschaftlich gehandelt haben; so scheint es nicht nöthig zu sein, zu dem daselbst erwähnten etwas mehreres hinzuzufügen.

Anhang
von der
Differentialrechnung.

Man übergiebt hier eine Theorie der Fluxionen, oder Differentialrechnung den Meskünstlern zur Prüfung. Es sind die Schwürigkeiten bei unendlichen Grössen bekannt genug, bei Grössen, die ihr Erfinder selbst für blosse Erdichtungen gehalten hat, a) deren Möglichkeit sich, nach dem Urtheile grosser Meskünstler, b) nicht evident begreifen läst, und über deren vornehmste Eigenschaften man noch nicht einig ist. c) Die Gewisheit der Neutonischen Methode hat Mac-Laurin durch einen andern Weg zu erweisen gesucht, der dennoch vielen ziem-

a) Acta Eruditor. 1712. p. 176. seqq. Essai de Theodicée Disc. prelim. §. 70: On s'embarasse dans les series des nombres qui vont à l'infini. On conçoit un dernier terme, un nombre infini, ou infinement petit; *mais* tout cela ne sont que des fictions. Tout nombre est fini & assignable, toute ligne l'est de même.

b) Treatise of Fluxions by Colin Mac-Laurin. Introd.

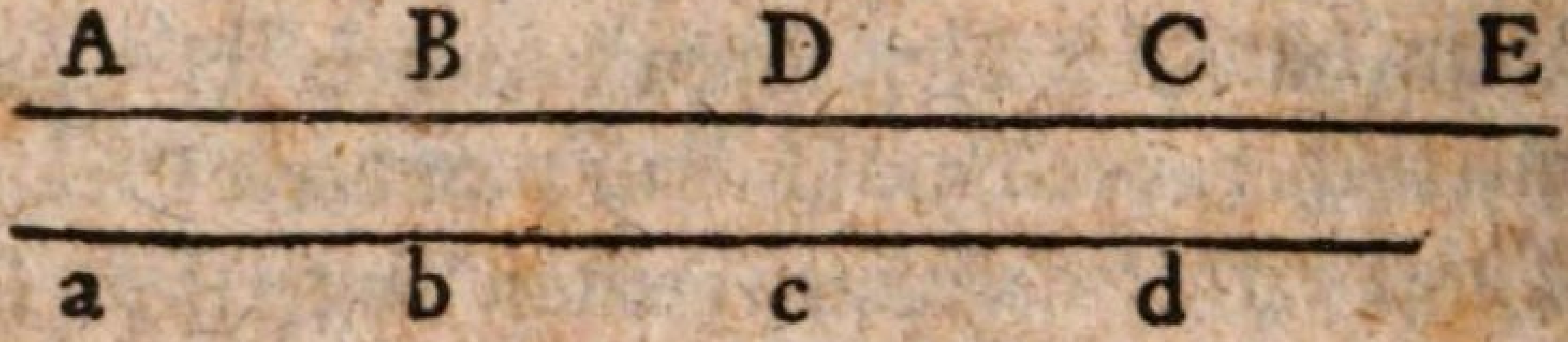
c) Herr Euler z. E. behauptet Instit. Calc. differ. jede unendlich kleine Grösse sei $= 0$, worin viele Meskünstler mit ihm nicht einig sind.

ziemlich ungewiß, wenigstens zuweilen unzureichend, und oft viel zu weitläuftig vorkommen möchte. Man überläst das Urtheil von der gegenwärtigen Methode dem vernünftigen Leser.

Man hat hier die Lehren von den Fluxionen geometrischer, mechanischer und anderer Grössen nicht mit erklären können: man untersteht sich aber aus eigner Erfahrung zu behaupten, daß die Aufgaben von den Tangenten, Flächen, Krümmungskreisen, Evoluten, Traiectorien u. s. f. bei welchen man die Differentialrechnung zu brauchen pflegt, sich nach dieser Theorie leicht auflösen lassen.

Endlich hat man einen kurzen Abriß von den Eigenschaften der Logarithmen und Potenzen vorausgeschickt, weil diese gemeiniglich schlecht erwiesen zu werden pflegen, und man ihrer doch bei den Fluxionen zum Theil nöthig hat.

I. Versuch
von den
Logarithmen und Potenzen.



Erklärungen.

§. 1. Es sei AB eine gerade Linie, die durch die Bewegung des Punkts B wächst oder abnimmt, und AD, AC, AE &c. Grössen, die sie nach und nach erhält, und die eine geometrische Reihe machen. Zugleich bewege sich der Punkt a in der geraden Linie ad, so daß er in b ist, indem sich B in D befindet, und nachgehends in c kommt, indem B in C ist, ferner in d, indem B in E ist u. s. f. so heist, wenn diese Räume ab, bc, cd &c. einander gleich sind, ieder von a in einer gewissen Zeit durchlaufner, und bei a anfangender Raum, als ac **der Logarithme des Verhältnisses** AC: AB, dessen erstes Glied AC in eben derselben Zeit, durch des Punktes B Bewegung entsteht, und bei A anfängt. Insbesondre nennt man ac **den Logarithmen der Zal** AC, wenn AB = 1 ist.

§. 2.

§. 2. Die Zal, deren Logarithme 1 ist, wird die Grundgrösse (basis) der Logarithmen genannt.

§. 3. Wenn x der Logarithme einer Zal y ist, indem a als die Grundgrösse derselben Logarithmen angenommen wird, so nennt man y eine Potenz oder Dignität von a, und x den Exponenten dieser Dignität.

Die Grösse a im Gegentheile wird eine Wurzel von ieder ihrer Dignitäten, als y, genannt, und ihr Exponent ist x.

Willkührliche Sätze.

§. 4. Der Logarithme einer Zal, wird durch ein, ihr vorgeschriebes, l ausgedrückt. So ist ly der Logar. von y.

§ 5. Die Potenz einer Grösse a, deren Exponent x ist, wird auf folgende Art: a^x bemerket.

§. 6. Die Wurzel einer Grösse y, deren Exponent x ist, drückt man durch $x\sqrt{y}$ aus; ausser wenn $x = 2$ ist, bezeichnet man die Wurzel schlechthin durch $\sqrt{y}$.

Grundsatz.

§. 7. Die Logarithmen machen eine arithmetische Reihe, davon das erste Glied 0 ist, wenn ihre Zalen eine geometrische Reihe machen, davon das erste Glied 1 ist.

Lehrsätze.

§. 8. Wenn $n = la$, und $m = lb$ ist, so wird $n + m = lab$.

Beweis. Denn da m und n Glieder einer arithm. Reihe sind, in der ein Glied o ist, (§. praec.) so folgt n entweder unmittelbar auf o, oder nicht.

1° Im ersten Falle, da n der Unterschied zweier unmittelbar auf einander folgender Glieder ist, muß m + n gleichfalls unmittelbar nach m stehen, und es ist daher, wenn man die Zal deren Logar. n + m ist, c nennt, 1 : a = b : c, (§. 7.) und daher c = ab.

2° Im zweiten Falle sind etliche andre Glieder zwischen o und n enthalten, deren Anzal ich r - 1 nennen will. Da nun iedes Glied von dem nächstfolgenden durchgehends gleichviel unterschieden ist, so muß der Unterschied zweier unmittelbar auf einander folgender Glieder in dieser Reihe $= \frac{n}{r}$ sein. Nun aber ist dieser Unterschied $\frac{n}{r}$ in dem Unterschiede n zwischen m und n + m, r male enthalten. Folglich stehen zwischen m und n + m ebenfalls Glieder an der Zal r - 1. Man nenne die zwischen 1 und a enthaltnen Glieder e, d, f &c. und die zwischen b und c, E, D, F &c. so ist

$$1 : e = b : E$$
$$e : d = E : D$$
$$d : f = D : F$$
$$f : a = F : c \quad (§. 7)$$

und

und daher überhaupt 1 : a = b : c, es mögen so viele Glieder als man will zwischen 1 und a oder b und c sein. Folglich ist auch hier c = ab.

§. 9. I. Zusatz. Also ist $la + lb = lab$

§. 10. Anmerk. Man sieht hieraus, daß a^2 dem Quadrate von a gleich sein müsse, da $la^2 = 2$ ist, indem man a als die Grundgrösse annimmt, und da $l a \times a = la + la = 1 + 1 = 2$ folglich $= la^2$ ist. Aus eben dem Grunde wird $a^3 = a \times a \times a$.

§. 11. II. Zusatz. Es ist $l\frac{b}{a} = lb - la$; weil $a \times \frac{b}{a} = b$ und daher $la + l\frac{b}{a} = lb$ ist.

§. 12. III. Zus. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Denn $l\frac{1}{a^m} = l1 - la^m$ (§. 11.) $= 0 - m = - m, = la^{-m}$ indem man a als die Grundgrösse ansieht. (§ 7. §. 3)

§. 13. IV. Zus. $a^m \times a^n = a^{m+n}$, weil $l(a^m \times a^n) = la^m + la^n$ (§. 9.) $= m + n = la^{m+n}$ ist, wenn a die Basis ist, (§. 3.)

§. 14. V. Zus. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Denn man setze $\frac{a^m}{a^n} = a^r$ so ist $a^m = a^n \times a^r$, folglich $m = n + r$ (§. 13.) und $r = m - n$.

§ 15. Es ist $(a^n)^m = a^{nm}$

Bew. Denn es sei $n = l\alpha$, und $mn = lb$, so wird, wenn a die Grundgrösse ist, $a^n = \alpha$, $a^{mn} = b$; und es ist klar, wenn man α als die Grundgrösse annähme, oder $n = 1$ sezte, daß $m = lb$ wäre, und folglich $\alpha^m = b$ sei. (§. 3.) da nun $\alpha = a^n$. ist, so wird b oder $a^{mn} = (a^n)^m$

§. 16. I. Zusatz. $l\alpha^m = ml\alpha$, da $b = \alpha^m$, und mn oder $lb = ml\alpha$ ist.

§. 17. II. Zus. $\sqrt[m]{c} = c^{\frac{1}{m}}$. Denn man setze $d^m = c$, so wird $d = \sqrt[m]{d^m} = \sqrt[m]{c}$ (§. §. 3. 5. 6.) folglich $(\sqrt[m]{c})^m = c$ sein. Nun aber ist auch $(c^{\frac{1}{m}})^m = c$. (§. 15.) folglich wird $\sqrt[m]{c} = c^{\frac{1}{m}}$.

II. Ver=

II. Versuch
von der
Differentialrechnung.

Erklärungen.

§. 18. Es sei z eine Function von x, und B - A der Unterschied zweener Werthe die z erhält, indem man x erstlich = a, und nachgehends = b, macht. Wenn ein Verhältniß d : b - a entweder unter allen niemals kleinern Verhältnissen als B - A : b - a, das kleinste, oder unter allen niemals grössern das gröste ist, es mag B so wenig als man will von A verschieden sein, a) so wird es ein Differentialverhältniß genant. Es heist nämlich d das Differential des Werthes B, und b - a das Differential von a.

a) Anmerk. Man sagt mit Bedacht: so wenig, nicht so viel, als man will.

§. 19. Jede veränderliche Grösse, als x, heißt ein Integral ihres Differentials y, das ein Differential vom ersten Grade genant wird, wenn x kein Differential ist. Das Differential aber von y heist das Differential vom zweiten Grade der Grösse x; und, wenn dieses wiederum ein Differential hat, so

er-

erhält man ein Differential vom dritten Grade u. s. f.

Auf eben die Art begreift man, was ein Integral vom zweiten, dritten, oder einem höhern Grade sei.

Willkührliche Säze.

§. 20. Das Differential einer Grösse wird durch ein, ihr vorgeschriebnes, d, bezeichnet; an dessen Spitze man die Zal sezt, welche den Grad desselben bezeichnet, wenn dieser höher als der erste ist. So ist dx das Differential vom ersten, d^2x das vom zweiten, d^3x das vom dritten Grade von x. Man schreibt auch ddx statt d^2x; dddx statt d^3x u. s. f.

§. 21. Vollkommen auf eben die Art bedient man sich des ſ um die Integrale zu bezeichnen. So ist ſdx das Integral vom ersten, $ſ^2dx$ oder auch ſſdx das vom zweiten, $ſ^3dx$ oder ſſſdx das vom dritten Grade von dx.

Grundsatz.

§. 22. Das Differential einer beständigen Grösse ist = 0.

Lehrsäze und Aufgaben.

§. 23. Jede Function hat für jeden besondern Werth, den sie erhält, nicht mehr als ein einziges Differentialverhältniß.

Bew.

Bew. Es sei F eine Function von x und $f - \varphi$ der Unterschied zweener Werthe von F: so müsten, wenn f mehr als ein Differential hätte, 2 Grössen da sein, davon die eine a unter allen beständig kleinern als $f - \varphi$ die gröste: die andre b aber unter allen beständig grössern die kleinste wäre, es mag der Unterschied $f - \varphi$ so geringe sein als man will, weil man offenbar sieht, daß sonst keine Fälle mehr möglich sind. (§. 18.) Es muß also iede Grösse die $> a$ ist, auch $> f - \varphi$ werden, wenn man $f - \varphi$ klein genug annimmt. Folglich muß iede Grösse c, die $< b$ und $> a$ ist auch $> f - \varphi$ werden können, und es kan daher b nicht die kleinste Grösse unter allen beständig grössern sein.

§. 24. Wenn man die Differentiale der Logarithmen von einerlei Grundgrösse beständig unter einander gleich annimmt, so haben die Zalen, als Functionen ihrer Logarithmen, auch Differentiale, die sich, wie die Zalen selbst, verhalten.

Bew. Erstlich ist es offenbar daß A unter allen Grössen, die $> A - AC$ sind, die kleinste sei, es mag C so klein sein, als man will. Denn wäre eine Grösse $A - B < A$ möglich, die beständig $> A - AC$ sein sollte, so müste B niemals $< AC$ werden können, welches falsch

ist,

ist, da C so klein, als man will, und folglich auch $< \frac{B}{A}$ angenommen werden kan.

Nun setze man a, b, c sein 3 Zalen, deren Logarithme von einerlei Grundgrösse la, lb, lc sind, so wird la - lac = la-lc-la = -lc, und lb-lbc = -lc. (§. 9.) Da nun zu la - lac der Unterschied a-ac, und zu lb - lbc der Unterschied b-bc gehört, so wird a: - lc das Differentialverhältniß von a, und b: -lc das Differentialverhältniß von b sein. (Bew. und §. 18.) Daher ist a: -lc = da: dlc und b: -lc = db: dlc, folglich a: b = da: db, in dem Falle da der Unterschied der Logar. beständig = lc ist.

§. 25. Zusatz. Das Differential einer Zal muß mit dem Differential ihres Logarithmen einmal einerlei werden, wenn dieses beständig einerlei bleibt.

Denn es sei b ein Werth der Zal, und db: dlb = b: a, so wird auch db: da = b: a, (§. praec.) und daher dlb = da, folglich das Differential der Zal bei dem Werthe a dem beständigen logarithmischen Differentiale *dlb* gleich sein.

Erklärung.

§. 26. Man nennt die Zal, deren Differential mit dem Differentiale ihres Logarithmen einer-

einerlei ist, den Model der Logarithmen.

§. 27. Logarithmen von einerlei Grundgrösse haben auch nur einen Model.

Bew. Denn es ist der Model a §. praec. $= b\,d\,l\,b : db$, und, wenn man statt b eine andre Zal c nimmt, $= c\,d\,l\,c : dc$. Nun ist $d\,l\,b = d\,l\,c$ und $dc : db = c : b$, folglich $b\,d\,l\,b : db = c\,d\,l\,c : dc$. Also bleibt a einerlei, es mag b so groß sein, als man will. Allein da auch das Verhältniß $db : d\,l\,b$ von einerlei Grösse bleibt, $d\,l\,b$ mag so groß sein, als man will, so lange b sich nicht verändert, (§. 23.) so muß auch a einerlei bleiben, es mag $d\,l\,b$ so groß sein, als man will.

§. 28. Es sei m der Model der Logar. so ist $d\,l\,x = \frac{m\,dx}{x}$

Bew. Denn es ist überhaupt $dm : dx = m : x$ wenn $d\,l\,x$ beständig einerlei Grösse behält. (§. 24.) Nun ist alsdenn aber auch $d\,l\,x = dm$ (§. §. 25. 26.) folglich wird $d\,l\,x : dx = m : x$.

§. 29. Wenn $f = z + y$ ist, so wird auch $df = dz + dy$.

Bew. Denn man setze $z = l\,x^r$, $y = l\,x^m$, so wird $f = l\,x^{r+m}$ (§. 13.) und da

daher $d(lx^r + lx^m) = \frac{(r+m)\,ndx}{x} = \frac{rndx}{x} + \frac{mndx}{x}$, indem n den Model bedeutet, (§. 28.) $= dz + dy$. (§. 28.)

§. 30. 1. Zus. Wenn $D = x - w$ ist, so wird auch $dD = dx - dw$, indem $D + w = x$, und daher $dD + dw = dx$, (§. praec.) folglich $dD = dx - dw$ ist.

§. 31. 2. Zus. Wenn daher überhaupt eine Gleichung gegeben ist, so findet dieselbe noch statt, indem man statt iedes Gliedes dessen Differential mit dem gehörigen Zeichen, sezt.

§. 32. Das Differential eines gegebnen Products zu finden.

Auflösung. Man vermehre das Differential eines ieden Factors mit den übrigen Factorn, so wird die Summe dieser Producte das gesuchte Differential sein.

Bew. Denn es sei xyz das gegebne Product $= w$, so ist $lx + ly + lz = lw$, (§. 9.) und daher $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = \frac{dw}{w}$, (§. 28. und 29.) also $yzdx + xzdy + xydz = dw$.

§. 33. das Differential von $\frac{x}{y}$ ist $\frac{ydx - xdy.}{y^2}$

Bew.

Bew. Denn man setze $\frac{x}{y} = z$, so ist $x = yz$, und daher $dx = ydz + zdy$ (§. praec.) und daher $dz = \frac{dx - zdy}{y} = (ydx - xdy) : y^2$.

§. 34. Das Differential von x^n ist $nx^{n-1} dx$.

Bew. Denn man setze $x^n = y$, so ist $nlx = ly$ (§.16.) und daher $\frac{ndx}{x} = \frac{dy}{y}$, (§.28) also $dy = nx^{n-1} dx$.

§. 35. Das Differential der Exponentialgrösse y^x ist $= \frac{y^x\, dly^x}{m}$, indem m den Model der Logarithmen bezeichnet.

Bew. Denn es sei a die Grundgrösse der Logarithmen, deren Model m ist, und $a^z = y^x = u$, so ist $z = ly^x = lu$, und daher $dz = \frac{m\,du}{u}$, also du, oder $dyz = \frac{a^z\,dz}{m} = \frac{y^x\, dly^x}{m}$

§. 36. Es sei AC die Axe der Abscissen, und AB die Axe der Applikaten der Linie tFGD. *fig. 1.* Man nenne iede Abscisse, als AR, x; die dazu

zu gehörige Applikate RF, y; und sin. BAC, r; so wird das Differential des Raumes Aα FR = rydx sein, indem man den sin. tot. = 1 annimt.

Bew. Denn indem die Linie αF von F aus weiter fortgeht, fällt sie entweder nicht über, oder nicht unter die der AC gleichlauffende FK. Man setze also erstlich, es sei FH ein solcher Theil vor ihr, der gänzlich nicht unter die FK fällt, und ziehe die Applikate TH, die der FK in K begegnet, so kan der Raum FHTR niemals kleiner werden, als das Parallelogr. FT, es mag H dem F so nahe liegen, als man will. Also ist das Verhältniß FT: RT niemals grösser als das Verhältniß FHTR: RT in Zalen ausgedrückt. Ich behaupte es sei unter allen ähnlichen das gröste. Denn es sei A : B grösser, so wird, wenn man B: A = RT : X macht, X ein größres Parallelogr. als FT bedeuten. Wäre demnach IT dieses Parallelogr. welches eben die Grundlinie RT und die verlängerte RF zur Seite hat so muß der Punkt I über die Linie αFD fallen, und es geht folglich die der AC gleichlauffende Linie IG entweder gänzlich über der αFG weg, oder sie durchschneidet sie in einem Punkte G. Im ersten Falle ist IT > FHTR und folglich IT : RT > FHTR: RT, welches wider das angenommne ist. Im zweiten Falle ziehe man die Applikate

kate GS, so ist offenbar das Verhältniß IS : RS $\succ$ FGSR : RS. Nun aber ist IS : RS = IT : RT. Folglich wird IT : RT $\succ$ FHTR : RT wenn der Punkt H dem F so nahe rückt daß er in G fällt. Daher ist unter allen Verhältnissen, die niemals grösser werden als FHRT : RT, es mag H dem F so nahe sein als man will, FT : RT das gröste. Nun ist FHTR der Unterschied der beiden Räume AαFR und AαHT, die zu den Abscissen AR und AT gehören, deren Unterschied RT ist. Also ist FT das Differential von AαFR wenn RT das Differential der Abscisse AR vorstellt. (§. 18) Man lasse Fd senkrecht auf AC, so ist FR : Fd = sin. tot. : sin. FRC = 1 : r, und daher Fd = ry. Macht man also RT = dx, so ist FT = rydx.

Auf eben die Art wird der andre Fall erwiesen, da die Linie αF von F aus nicht über die FK fällt. *

III.

* Aus diesem Satze läst sich der 29 §. erweisen der eigentlich nur gilt, wenn x und y Logar. sind. Er ist zureichend und nothwendig um den 32 §. daraus herzuleiten, aus welchem §. er allgemein bewiesen werden kan. Man mache nämlich $\frac{y}{x} = V$, so ist $l = (1 + V) x$, und daher $dl = (1 + V) dx + xd (1 + V)$. Nun ist $d(1 + V) = dV$. (§. 22.) Folglich wird $dl = dx + Vdx + xdV = dx + dy$.

III. Anwendung auf die Kegelschnitte.

fig. 18. §. 37. Der Parabolische Raum ALMP, welcher von der Parabel ALM, dem Hauptdurchmesser AP, und einer zu demselben geordneten Applikate PM begränzt wird, macht $\frac{2}{3}$ des Parallelogr. zwischen MP und AP aus.

Bew. Die Gleichung für die Parabel ist $y^2 = nx$, wenn AB die Axe der Abscissen, und die Berührungslinie bei A die andre Axe ist. (III. §. 14.) Folglich ist ydx, das Differential des Raums ALMP, (§. praec.) $= dx \sqrt{(nx)}$, dessen Integral $2x \sqrt{(nx)} : 3 = \frac{2}{3} xy$ ist. (§. 32. und §. 34).

fig. 6. §. 38. Wenn MF eine zum Hauptdurchmesser mG geordnete Applikate bei der Ellipse ist, und man die Abscissen aus dem Mittelpunkte, als CF, z; mC, a; und den zu mC geordneten Hauptthalbmesser CB, b nennt, so ist der Raum $CAMF = b\ (z - \frac{z^3}{6a^2} - \frac{z^5}{40a^4} - \frac{z^7}{112a^6} - \frac{5z^9}{1152a^8} - \&c.)$

Bew. Denn da $y = b\sqrt{(a^2 - z^2)} : a$ (V. §. 8.), und $\sqrt{(a^2 - z^2)} = a - \frac{z^2}{2a} - \frac{z^4}{8a^3} - \frac{z^6}{16a^5}$

$- \frac{z^6}{16a^5} - \frac{5z^8}{128a^7}$ - &c. ist, (Theor. Binom.

so wird ydx. das Differential von CBMF, =

$bdz - \frac{bz^2 dz}{2a^2} - \frac{bz^4 dz}{8a^4}$ - &c, und daher

$\int y dz = CBMF = bz - \frac{bz^3}{6a^2} - \frac{bz^5}{40a^4}$

— &c.

§. 39. I. Zusatz. Wenn man über ebendemselben Hauptdurchmesser mG aus ebendemselben Mittelpunkte C, noch eine andre Ellipse $m\mu\beta G$ beschreibt, in der $C\beta = B$ der zu mC geordnete Haupthalbmesser ist, so wird $C\beta\mu F$ $= B\,(z - \frac{z^3}{6a^2}$ — &c.), und verhält sich also $C\beta\mu F : CBMF = B : b$. In eben dem Verhältnisse stehen, wie man leicht sieht, die Ausschnitte $C\mu\beta$, CMB; da Δ CMF : Δ $C\mu F$ = FM:* $F\mu$ = CB : $C\beta$ ist.

§. 40. II. Zusatz. Man setze z = a, so wird CBMm = ab ($1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ - &c), und daher der Raum der ganzen Ellipse = 4ab ($1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40}$ - &c). Da nun die Ellipse ein Kreis wird, wenn a = b ist (III. §. 14) so ist eine Kreisebene, deren Halbmesser 1 ist, = 4 ($1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ - &c) = 3, 14159 26535

* Elem. VI. 1.

26535 &c. Es erhellet hieraus, daß die Räume der Ellipsen sich wie die Producte aus den beiden zugeordneten Haupthalbmessern verhalten, und folglich daß die Kreisebnen in dem Verhältnisse der Quadrate ihrer Halbmesser stehen, wie auch aus den Anfangsgründen bekannt ist. Endlich sieht man daß der ganze Raum in einer Ellipse, deren Haupthalbmesser a und b sind, einer Kreisebne gleich sei, deren Halbmesser r ist, wenn sich a : r = r : b verhält.

fig. 23. §. 41. Wenn von den Asymptoten Cf, CF einer Hyperbel die eine als Axe der Abscissen, und die Axe der Applikaten der andern gleichlauffend angenommen wird, der Anfangspunkt aber der Abscissen B ausser dem Mittelpunkte C liegt, dergestalt daß CB = c ist, so wird ein ieder Asymptotischer Raum ABPM $= r\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} + \frac{x^5}{5c^5} - \frac{x^6}{6c^6} + \&c\right)$, indem 1 die Potenz der Hyperbel, und r den sin. C bezeichnet.

Bew. Denn da unter den gesezten Umständen $cy + xy = 1$ die Gleichung für die Hyperbel ist, (VI. §. 11.) so wird $rydx = \frac{rdx}{c+x} = r\left(\frac{dx}{c} - \frac{xdx}{c^2} + \frac{x^2dx}{c^3} - \frac{x^3dx}{c^4} + \&c.\right)$ und folglich

ſrydx

$$\int rydx = ABMP = r\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} + \&c.\right)$$

§. 42. I. Zus. Wenn man die geraden Linien CA, CM zieht, so wird der Ausschnitt ACM = ABMP. Denn da die Dreiecke CMP, CAP einander gleich sind, so bleibt auch, indem man von beiden CaB wegnimmt, CAa = aBMP. Thut man also ferner von beiden Seiten den Raum AaM hinzu, so muß CAM = ABPM sein. Man sieht hieraus, wie man die Hyperbolischen Ausschnitte durch eine Zalenreihe ausdrücken könne.

§. 43. II. Zus. Da das Differential von ABMP $= \frac{rdx}{c+x}$ ist, so erhellet daß ABMP = l (c + x) sei, dessen Model r ist. (§. 28) Nimmt man also r = 1 an, so ist die Hyperbel rechtwinklicht, (VI. §. 10) und der Model der Logarithmen = 1. Daher begreift man, warum die natürlichen Logarithmen des Nepers auch Hyperbolische genant zu werden pflegen, weil von ihnen die Quadratur der rechtwinklichten Hyperbel abhängt.

§. 44. III. Zus. Man nenne ABMP, L, und c + x, y; r aber m, so ist $y^2 = 1 + \frac{zL}{m} + \frac{z^2L^2}{2m^2}$

$\frac{z^2 L^2}{2m^2} + \frac{z^3 L^3}{2.3.m^3} + \frac{z^4 L^4}{2.3.4m^4}$ + &c.* Denn man setze $y^z = x$, uud $zly = lx = p$, x aber $= a + bp + cp^2 + ep^3 + fp^4 +$ &c. Dadurch erhält man $dx = bdp + 2cpdp + 3ep^2 dp + 4fp^3 dp +$ &c. und $\frac{mdx}{dp} = m(b + 2cp + 3ep^2 +$ &c.) Nun aber ist $x = \frac{mdx}{dp}$, da $p = lx$ ist. Also wird $a = 1$, und $x = 1 + bp + cp^2 + ep^3 +$ &c. $= m(b + 2cp + 3ep^2 +$ &c), wodurch man folgende Gleichungen erhält **, $1 = mb$, $b = 2mc$, $c = 3me$, $e = 4mf$ &c. Also wird $b = \frac{1}{m}$, $c = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2m^2}$ $e = \frac{1}{2.3m^3}$ $f = \frac{1}{2.3.4m^4}$ &c. und

* Iac. Bernoulli de seriebus infinit. im Anhange zu der Ars coniectandi.

** Denn wenn in der Gleichurg $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. $= a + bx + cx^2 + dx^3 +$ &c. x veränderlich ist, so kan man es auch $= 0$ annehmen. Alsdenn aber wird $A = a$. Folglich ist $Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. $= bx + cx^2 + dx^3 +$ &c, oder $B + Cx + Dx^2$ &c $= b + cx + dx^2 +$ &c, und daher, indem man aufs neue $x = 0$ setzt, $B = b$. Auf eine ähnliche Art wird erwiesen daß auch die übrigen Coefficienten von einerlei Potenzen von x untereinander gleich sind.

und derowegen $x = 1 + \frac{p}{m} + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^3}{2.3m^3}$ + &c, oder $yz = 1 + \frac{zL}{m} + \frac{z^2L^2}{2m^2} + \frac{z^3L^3}{2.3m^3}$ + &c.

Ist daher $z = 1$, so wird y, oder $c + x$, $= 1 + \frac{L}{m} + \frac{L^2}{2m^2} + \frac{L^3}{2.3m^3}$ + &c, welche Reihe dient aus dem gegebnen Raume L, und dem sinus m, die Abscisse $c + x$ zu finden.

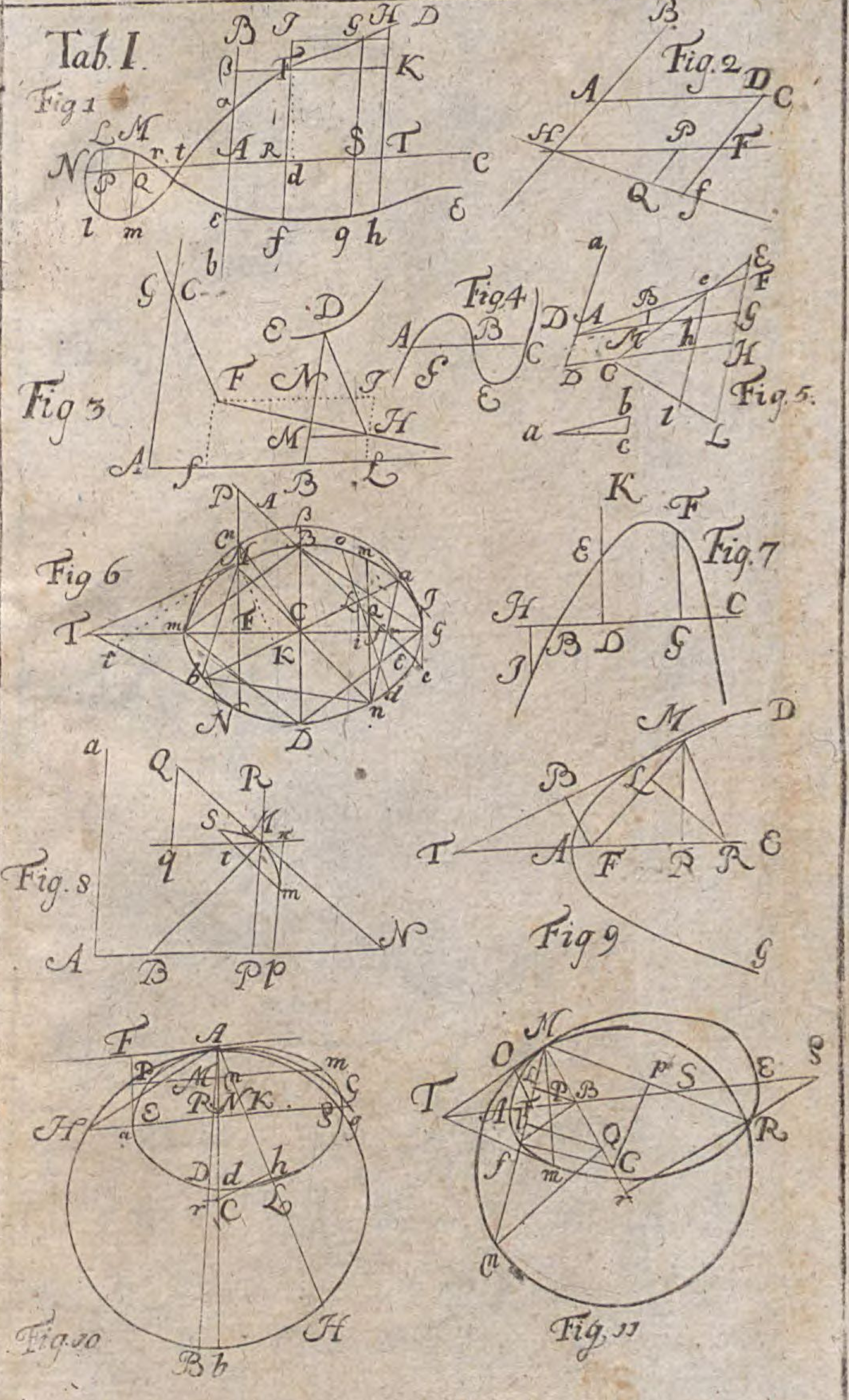
§. 45. IV. Zus. Es sei $z = 1$ und $L = m$, so erhalten wir $y = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$ + &c = 2,718281828459 &c. Das Verhältniß dieser Zal zur Einheit nennt Cotes das Modularverhältniß.

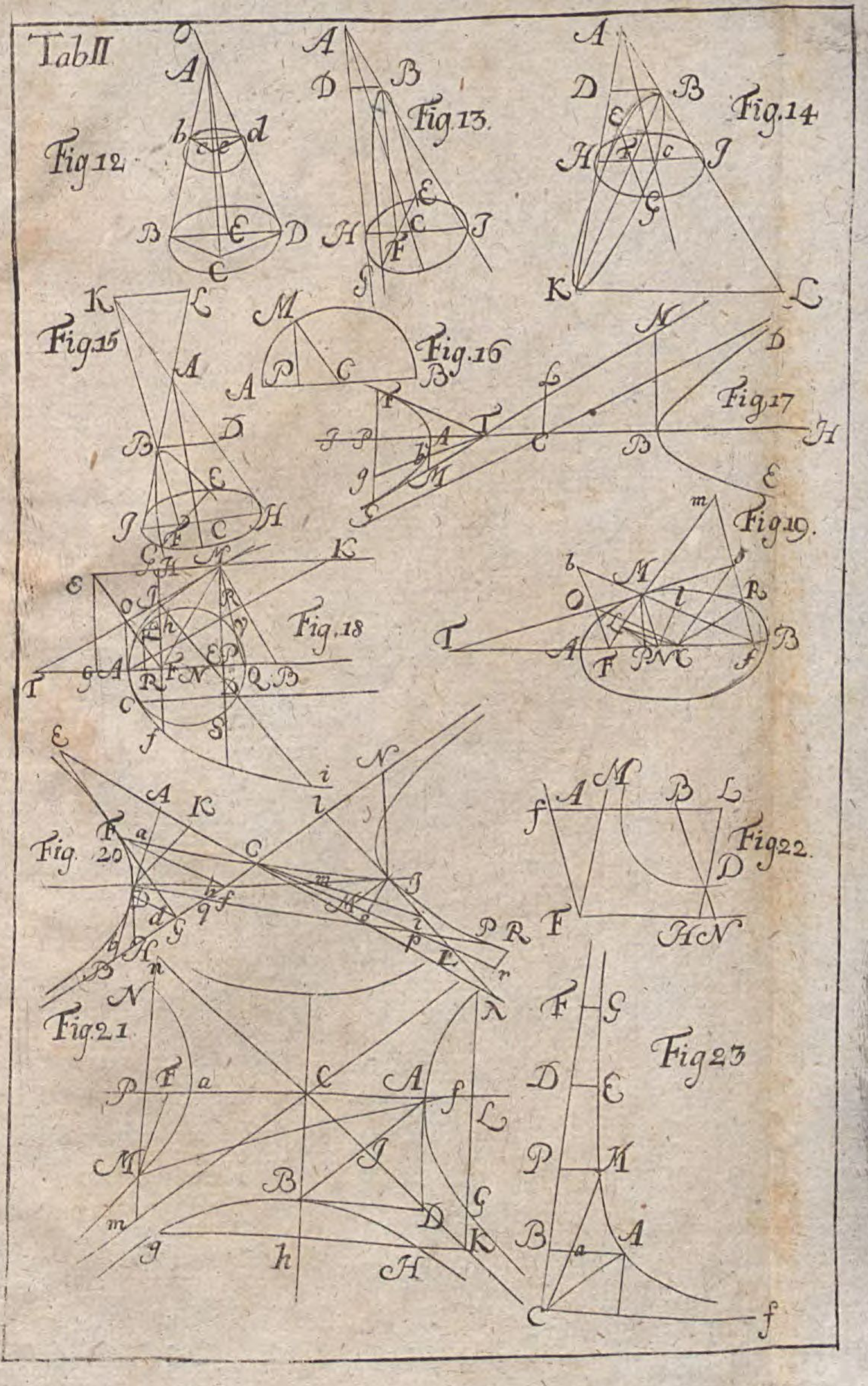
Ist y der Grundgrösse a der Logarithmen gleich, so wird $L = 1$, und daher $a^z = 1 + \frac{z}{m} + \frac{z^2}{2m^2} + \frac{z^3}{2.3m^3} + \frac{z^4}{2.3.4m^4}$ + &c. und $a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{6m^3} + \frac{1}{24m^4} + \frac{1}{120m^5}$ + &c.

Druckfehler.

p. 3. lezte Z. $x = AR$. p. 11. dritte Z v. u. Grade. p. 16. Zeile 10. u. 11. M statt C. p. 17. am Rande fig. 6. p. 22. Z. 6. D statt A. p. 26. Z. 9. $+(\frac{1}{2}a^2 - m^2)x^2$. p. 27 Z. 4. v. u. $m = \frac{1}{2}a$. p. 28. zu §. 7. seq. fig. 6. Z. 9. el Z. 14. al. p. 29. Z. 5. AN. p. 30. Z. 22. 2n. p. 32. Z. 9. $mF \times FG$. p. 34. Z. 4. Tm. Z. 11. $cx^2 + dx$. p. 40. Z. 13. aus. p. 41. am Rande: fig. 10. p. 45. Z. 20. $p^2 + q^2$. p. 47. Z. 13. $TmM = TMm$. p. 56. Z. 18. zu sein, p. 57. Z. 7. v. u. seq. Ae statt AC. p. 67. Z. 2. und f p. 69. Z. 1. TM. p. 71. Z. 2. $(PM + PR)$ p. 74. Z. 3. CL statt (L). p. 78. Z. 4. s^2 statt s^4. p. 81. Z. 1. zur. Z. 7. $(a + a^2 : z)$. Z. 11. $(z - a^2 : z)$ Z. 12. $(a - a^2 : z)$ p. 83. Z. 7. ein. p. 92. Z. 23. in p und.

Tab. I.




Tab II
Fig 12
Fig 13
Fig 14
Fig 15
Fig 16
Fig 17
Fig 18
Fig 19
Fig 20
Fig 21
Fig 22
Fig 23

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hube, Jan Michał,

Versuch einer Analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten

Göttingen 1759

Math.p. 226 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082067-7
VD18 14482169